1. Einführung

1.1 Argument, Gültigkeit und Herleitbarkeit

Die Logik beschäftigt sich – vereinfacht ausgedrückt – mit Fragen nach der Gültigkeit bzw. Herleitbarkeit von Argumenten und der Wahrheit bzw. Beweisbarkeit von Aussagen.
Die Logik ist also nicht die Lehre von den Regeln ‚richtigen' Denkens; sie handelt weder davon, wie gedacht wird, noch davon, wie gedacht werden soll – ein derartiger Psychologismus wird seit **Gottlob Frege (1848-1925)** und **Edmund Husserl (1859-1938)** kaum noch ernsthaft vertreten.

Betrachten Sie bitte folgende Beispiele:

(1) Wenn es regnet, dann ist die Straße nass. Es regnet. Daher ist die Straße nass.

(2) Wenn es regnet, dann ist die Straße nass. Es regnet nicht. Daher ist die Straße nicht nass.

(3) Wenn es regnet, dann ist die Straße nass. Die Straße ist nass. Daher regnet es.

(4) Wenn es regnet, dann ist die Straße nass. Die Straße ist nicht nass. Daher regnet es nicht.

In diesen vier Fällen handelt es sich um eine Menge von Aussagen, wobei von der jeweils letzten Aussage (der Konklusion) behauptet wird, daß sie aus den vorherigen Aussagen (den Prämissen) folgt. Eine solche Menge von Aussagen nennt man Argument.
Wodurch unterscheiden sich nun die obigen Argumente? Von welchen würden Sie intuitiv sagen, daß sie gültig sind?
In der Literatur ist es auch gebräuchlich, die Aussagen eines Argumentes untereinander zu schreiben und die Konklusion durch einen horizontalen Strich von den Prämissen zu trennen, wobei dieser dann die Funktion des ‚daher' übernimmt.

Betrachten Sie bitte folgende Beispiele:

(5) Alle Menschen sind sterblich
Jane ist ein Mensch
Jane ist sterblich

(6) Alle Menschen sind sterblich
Lassie ist kein Mensch
Lassie ist nicht sterblich

(7) Alle Menschen sind sterblich
Lassie ist sterblich
Lassie ist kein Mensch

(8) Alle Menschen sind sterblich
Lassie ist nicht sterblich
Lassie ist kein Mensch

Von welchen dieser Argumente würden Sie intuitiv sagen, daß sie gültig sind?

Um sagen zu können, wann ein Argument logisch gültig ist, müssen wir seine logische Struktur analysieren, und dazu die logische Form des Argumentes (die Argumentform) finden.
Betrachten wir nochmals die ersten vier Argumente. Diese sind sämtlich aus den beiden Aussagen ‚es regnet‘ und ‚die Straße ist nass‘ gebildet, und zusätzlich aus den sog. logischen Ausdrücken ‚wenn ... dann ...‘ und ‚nicht‘. Andere (aussagen-)logische Ausdrücke wären etwa ‚und‘, und ‚oder‘.
Zwei Argumente haben nun die gleiche Form, wenn das eine Argument aus dem anderen gebildet werden kann, indem man seine Aussagen durch andere Aussagen (der gleichen Art) ersetzt.
Die logischen Ausdrücke werden meist durch Symbole abgekürzt, u.z. etwa ‚wenn ... dann ...‘ durch ‚$\rightarrow$‘ und ‚nicht‘ durch ‚$\neg$‘. Die Form eines Argumentes bestimmt man nun, indem man für die Aussagen Buchstaben (sog. Platzhalter) einsetzt (u.z. gleiche Buchstaben für gleiche Sätze und verschiedene Buchstaben für verschiedene Sätze), und für die logischen Ausdrücke die erwähnten Abkürzungen.

Wenden wir diese Methode auf die ersten vier Beispiele an, erhalten wir folgende logische Formen der Argumente:

(1*) $A \rightarrow B$
$\underline{A}$
B

(2*) $A \rightarrow B$
$\underline{\neg A}$
$\neg B$

(3*) $A \rightarrow B$
$\underline{B}$
A

(4*) $A \rightarrow B$
$\underline{\neg B}$
$\neg A$

Ein Argument ist nun gültig genau dann, wenn es kein Argument der gleichen logischen Form gibt, bei dem alle Prämissen wahr, die Konklusion aber falsch ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß für alle Argumente der gleichen logischen Form gilt: wenn alle Prämissen wahr sind, dann ist auch die Konklusion wahr. In diesem Falle sagen wir auch, daß die Konklusion aus den Prämissen logisch folgt. Bitte beachten sie, daß wir bei der Definition der Gültigkeit eines Argumentes nicht verlangt haben, daß alle Prämissen wahr sein müssen!
Demnach sind unsere Argumente (1) und (4) gültig, (2) und (3) hingegen nicht. Um einzusehen, daß (2) und (3) nicht gültig sein können, nehmen wir an, daß gerade ein Straßenreinigungsfahrzeug die Straße nass gespritzt hat. In beiden Fällen sind alle Prämissen wahr, die Konklusion aber falsch. Von der zweiten Gruppe unserer Argumente sind (5) und (8)

gültig, (6) und (7) hingegen nicht (obwohl bei (7) alle Prämissen und die Konklusion wahr sind, und bei (8) eine Prämisse falsch ist).

Es geht in der Logik nun nicht darum, einzelne konkrete Argumente auf ihre Gültigkeit hin zu untersuchen, sondern – neben anderem – den allgemeinen Zusammenhang zwischen Gültigkeit und Form von Argumenten aufzuklären. Dabei ist die Gültigkeit (wie der Begriff der logischen Folge) ein semantischer Begriff, definiert unter Bezugnahme auf Wahrheit oder Falschheit, die Form aber ist ein syntaktischer Begriff.
Es ist für die Logik von grundlegender Bedeutung, daß man bei vielen wichtigen Klassen von Argumentformen die gültigen unter diesen syntaktisch charakterisieren kann durch die Beweisbarkeit in einem formalen System (Kalkül). In diesen Fällen kann man den Folgerungsbegriff ersetzen durch den der Herleitbarkeit nach bestimmten Regeln. Daher spielen diese sog. Korrektheits- und Vollständigkeitssätze in allen Teilgebieten der Logik eine zentrale Rolle.

Wir wissen jetzt zwar, wann ein Argument gültig ist, aber wir wissen noch nicht, was Wahrheit eigentlich bedeutet. Dieses Problem ist ein klassisches philosophisches Problem mit langer Tradition. Schon im klassischen Griechenland war die berühmte ‚Antinomie des Lügners', oder einfach nur ‚der Lügner' bekannt. In einer einfachen Formulierung wird diese Antinomie ausgedrückt durch die Sätze ‚Ich lüge jetzt', oder: ‚Ein Mann aus Kreta sagt: „Alle Kreter lügen. Ich bin ein Kreter"'. Wegen ihrer letzten Formulierung wird diese Antinomie oft auch nur kurz ‚der Kreter' genannt.
Eine Antinomie ist ein Satz oder eine Menge von Sätzen, aus denen man mit plausibel scheinenden Annahmen einen Widerspruch beweisen kann. Dies eine höchst unbefriedigende Situation, weil man aus einem Widerspruch mit logischen Mitteln jede beliebige Aussage herleiten und behaupten kann. Sollen wir jetzt dem Mann aus Kreta glauben, wenn er sagt, daß er lügt oder nicht? Wenn wir annehmen, daß er die Wahrheit sagt, dann müssen wir schließen, daß er lügt. Und wenn wir umgekehrt annehmen, daß er lügt, müssen wir schließen, daß er die Wahrheit sagt. Wie wir es auch drehen und wenden, wir verwickeln uns zwangsläufig in einen Widerspruch.
Eine mathematisch und philosophisch befriedigende Wahrheitstheorie wurde von **Alfred Tarski (1902-1983)** als Semantik der Prädikatenlogik entwickelt.

Die Aussagenlogik analysiert natürlichsprachliche Aussagen mithilfe der aussagenlogischen Ausdrücke, der sog. Junktoren ‚nicht', ‚und', ‚oder', ‚wenn ... dann ...', ‚... genau dann, wenn ...', etc. Die Prädikatenlogik analysiert natürlichsprachliche Aussagen zusätzlich mithilfe der prädikatenlogischen Ausdrücke, der sog. Quantoren ‚für alle x gilt: ...' und ‚es gibt ein x, für das gilt: ...'.

Die Entwicklung der Prädikatenlogik in der *Begriffsschrift (1879)* von **Gottlob Frege (1848-1925)** wird allgemein als der bedeutendste Fortschritt in der Entwicklung der Logik seit der von **Aristoteles (384-322 v.u.Z.)** in seinem *Organo*n, speziell der *Analytica priora (4. Jhdt. v.u.Z)* entwickelten Syllogistik angesehen. Mit dieser Syllogistik war es unmöglich, die logische Struktur von Aussagen wie ‚alle Pferdeköpfe sind Tierköpfe' (und ebenso die Struktur der Argumente (5)-(8)) adäquat zu analysieren. Frege verwendete dazu die neuen (prädikaten-)logischen Ausdrücke ‚für alle x gilt: ...' (Allquantor, abgekürzt mit ‚$\forall$x ...') und ‚es gibt ein x, für das gilt: ...' (Existenzquantor, abgekürzt mit ‚$\exists$x ...'). Ferner verwendet er zur logischen Analyse von Argumenten nicht nur einstellige Prädikate wie ‚x ist rot', sondern auch mehrstellige, wie ‚x ist größer als y'. Mit diesen Mitteln ist es nun möglich, die logische Form der Argumente (5)-(8) anzugeben. Wenn wir etwa Argument (5) umformulieren in:

(5') Für alle Dinge x gilt: wenn x ein Mensch ist, dann ist x sterblich
<u>Jane ist ein Mensch</u>
Jane ist sterblich

und folgende Abkürzungen verwenden: für ‚x ist ein Mensch': ‚M(x)', für ‚x ist sterblich': ‚S(x)', für ‚Jane': ‚a' und für ‚Lassie': ‚b', dann erhalten wir folgende logische Formen von (5)-(8):

(5*) $\forall x(M(x)\rightarrow S(x))$
$\underline{M(a)}$
$S(a)$

(6*) $\forall x(M(x)\rightarrow S(x))$
$\underline{\neg M(b)}$
$\neg S(b)$

(7*) $\forall x(M(x)\rightarrow S(x))$
$\underline{S(b)}$
$\neg M(b)$

(8*) $\forall x(M(x)\rightarrow S(x))$
$\underline{\neg S(b)}$
$\neg M(b)$

Mithilfe der Aussagen- und Prädikatenlogik ist es möglich, die logische Tiefenstruktur von natürlichsprachlichen Aussagen zu analysieren, die oft von der grammatikalischen Oberflächenstruktur abweicht. Die Arbeiten zur Prädikatenlogik von **Gottlob Frege (1848-1925)**, **Alfred Tarski (1902-1983)** und anderen hatten großen Einfluß auf die Entwicklung der Analytischen Philosophie im 20. Jahrhundert, insb. auf die sog. ‚Ideal language philosophy'.

Zur Repräsentierung natürlichsprachlicher Ausdrücke:

Natürliche Sprache	$\longrightarrow$	Formale Sprache
Argument		Argumentform, (wohlgeformte) Formel

Dieses Thema wird uns jedoch im weiteren Verlauf dieser Vorlesung nicht weiter beschäftigen, da wir ausschließlich eine formale Sprache der Aussagenlogik als Objekt unserer Untersuchung annehmen.

1.2 Geschichtlicher Überblick

Das Thema dieser Vorlesung ist eine elementare Einführung in die Beweistheorie, insb. in die Theorie der Sequenzenkalküle und der Kalküle des Natürlichen Schliessens.
Die Entwicklung der Beweistheorie und dieser beiden Deduktionssysteme fällt historisch in einen sehr interessanten Abschnitt der Mathematik, der geprägt war von der Entdeckung zahlreicher Antinomien und der daraus resultierenden Diskussion, wie die Mathematik denn auf ein sicheres Fundament zu stellen wäre.

Nachdem bereits in der von **Georg Cantor (1845-1918)** entwickelten Mengenlehre Widersprüche aufgetreten waren (so etwa 1895 die Antinomie von Burali-Forti, die sich auf die Menge aller Ordinalzahlen bezieht), versuchte **Gottlob Frege (1848-1925)** in seinem ersten Band der *Grundgesetze der Arithmetik (1893)* Teilen der Cantorschen Mengenlehre eine axiomatische Gestalt zu geben. Sein Ziel war es, die Mathematik logisch-mengentheoretisch zu begründen.
Zu den Axiomen gehörte auch das naive Komprehensionsprinzip: zu jeder Eigenschaft E existiert eine Menge $M_E = \{x \,/\, E \text{ trifft auf } x \text{ zu}\}$. 1901 leiteten unabhängig voneinander **Bertrand Russell (1872-1970)** und **Ernst Zermelo (1871-1953)** im Fregeschen System einen Widerspruch ab, die sog. Russellsche Antinomie. Diese Antinomie erhält man, indem man als Eigenschaft $E_R = x \notin x$ und als Menge $M_R = \{x \,/\, x \notin x\}$ wählt; unter der Voraussetzung, daß gilt: $a \in \{x \,/\, E(x)\}$ genau dann, wenn E(a), erhält man zunächst: $y \in M_R$ genau dann, wenn $y \notin y$, und schließlich: $M_R \in M_R$ genau dann, wenn $M_R \notin M_R$.

Diese Antinomien führten zur sog. Grundlagenkrise der Mathematik und damit zu einer Erschütterung des Platonismus, der lange Zeit vorherrschenden Grundlagenposition der Mathematik. Dieser auf **Plato (427-347 v.u.Z.)** zurückgehenden Auffassung nach dient die Mathematik dazu, eine einzige mathematische Wirklichkeit zu beschreiben. Diese Wirklichkeit existiert genauso wie die platonischen Ideen zeitlos, unveränderlich und unabhängig von den Menschen. Ebenso existieren mathematische Objekte (Mengen, Zahlen) unabhängig von den Menschen. Mathematische Sätze beschreiben diese Wirklichkeit und sind entweder wahr oder falsch. Unendliche Gesamtheiten werden als fertig vorgegeben angenommen. Der Platonismus ist auch wohl heute noch die am weitesten verbreitete Auffassung unter praktizierenden Mathematikern.

Als Alternativen dazu wurden in dieser Zeit folgende Grundlagenpositionen entwickelt:
Der Logizismus, vertreten von **Gottlob Frege (1848-1925)** und **Bertrand Russell (1872-1970)**, versuchte die Mathematik auf die Logik zurückzuführen. Dieser Auffassung nach sind alle mathematischen Sätze logische Sätze. Allerdings verwendete Russell bei seiner Axiomatisierung der Mengenlehre bestimmte Axiome, die schwerlich als logische Sätze angesehen werden können, so etwa das Reduzibilitätsaxiom und das Unendlichkeitsaxiom, das die Existenz unendlicher Mengen garantiert.
Der Intuitionismus, vertreten u.a. von **Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966)**, **Arend Heyting (1898-)** und zeitweise auch von **Hermann Weyl (1885-1955)**, kritisierte an der klassischen Mathematik die Verwendung fertig vorgegebener, aktual-unendlicher Gesamtheiten und den Gebrauch des tertium non datur ($A \vee \neg A$) im Zusammenhang mit unendlichen Mengen. Mathematische Objekte existieren nicht unabhängig von den Menschen, von der Möglichkeit, sie zu konstruieren. Sie existieren nicht, um entdeckt zu werden, sondern werden erfunden. Deshalb lehnen Intuitionisten indirekte Existenzbeweise

ab. Mathematische Sätze sind nicht entweder wahr oder falsch, sie können beweisbar, widerlegbar oder keines von beiden sein. Die Mathematik besteht aus der Urintuition der Zahlenreihe, mathematische Sätze sagen etwas über intuitive Konstruktionen unseres Bewußtseins aus. Der Intuitionismus entwickelte eine von der klassischen Logik teilweise erheblich abweichende alternative Logik, die sog. intuitionistische Logik, die 1930 von Heyting axiomatisiert wurde.
Der Formalismus, vertreten von **David Hilbert (1862-1943)** und seinen Schülern, wollte die klassische Mathematik gegenüber der Kritik der Intuitionisten in Schutz nehmen und rechtfertigen („Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können"). Dieser Auffassung nach ist die Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems das entscheidende Kriterium für seine Brauchbarkeit, unabhängig von Bedeutung oder Wahrheit der Axiome. Die Widerspruchsfreiheit einer solchen axiomatisierten, formalen mathematischen Theorie garantiert gleichzeitig die Existenz mathematischer Objekte und soll mit finiten, d.h. elementaren kombinatorischen und damit unproblematischen Methoden bewiesen werden. Einen empfindlichen Rückschlag erhielt dieses Programm durch **Kurt Gödel (1906-1978)**, der in seinem Werk *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme (1931)* zeigte, daß sich die Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie nicht mit Mitteln der Zahlentheorie selbst beweisen läßt.

Diese Auffassungen im Grundlagenstreit der Mathematik spiegeln in gewisser Weise die Auffassungen im mittelalterlichen Universalienstreit wider.

Das Problem der Universalien: Universalien ist die scholastische Bezeichnung für die abstrakten Allgemeinbegriffe im Gegensatz zu den Partikularien, der Bezeichnung für die konkreten individuellen Einzeldinge. Die Frage nach der Seinsweise der Allgemeinbegriffe wird als Universalienproblem bezeichnet. Es lassen sich vier verschiedene Auffassungen unterscheiden:
Der Platonische Realismus: nach dieser auf **Plato (427-347 v.u.Z.)** zurückgehenden Auffassung existieren Universalien unabhängig von den Einzeldingen, und diese nur Kraft ihrer Teilhabe an den Universalien. Universalien dieser Art sind Universalien vor den Dingen (‚universalia ante rem'). Die Schwierigkeit dieser Auffassung liegt darin, zu erklären, wie eine Universale in mehreren Individuen exemplifiziert sein kann. Schon Aristoteles hat diese Auffassung als eine unnötige Erweiterung des Inventars existierender Gegenstände kritisiert.
Der Aristotelische Realismus: nach dieser auf **Aristoteles (384-322 v.u.Z.)** zurückgehenden Auffassung existieren Universalien in den Einzeldingen selbst (‚universalia in re'). Diese Auffassung vermeidet zwar das oben angeführte Problem, hat aber die Schwierigkeit, zu erklären, was das Gemeinsame der Universale eines Individuums mit derselben Universale eines anderen Individuums ist.
Diese beiden Auffassungen werden auch oft unter der Bezeichnung Begriffsrealismus subsumiert.
Der Konzeptualismus: Universalien sind Begriffe unseres Denkens insofern, als sie eine Anzahl von Einzeldingen unter einem gemeinsamen Aspekt zusammenfassen. Sie sind Universalien nach den Dingen (‚universalia post rem') und keine ontologischen Bestimmungen mehr, sondern bloß erkenntnistheoretische. Diese Auffassung sieht sich mit der Schwierigkeit konfrontiert, daß nichts dagegen spricht, beliebige Einzeldinge zu einem Allgemeinbegriff zusammenzufassen.
Der Nominalismus: Universalien existieren nicht selbständig, sondern sind bloße Worte, die auf verschiedene Einzeldinge angewendet werden. Auch hier scheint es wie beim Konzeptualismus eine Frage von zufälligen Konventionen zu sein, welche Dinge denselben Namen tragen.

Fassen wir die Positionen zum Universalienproblem wie folgt zusammen:

Es gibt keine Universalien:	Nominalismus	
Es gibt Universalien:	sie haben nur im menschlichen Geist Bestand: Konzeptualismus (post rem)	
	sie existieren in der Wirklichkeit:	nur am konkreten Einzelding (in re)
		unabhängig vom Einzelding (ante rem)

In der Gegenwartsphilosophie hat das Universalienproblem im Zusammenhang mit den Grundlagen der Mathematik, insb. in der Frage nach dem ontologischen Status von Mengen oder Zahlen, erneut große Bedeutung erlangt. Die scholastischen Auffassungen entsprechen dabei den folgenden mathematischen Grundlagenpositionen:

Begriffsrealismus	Platonismus (Realismus)
Konzeptualismus	Intuitionismus
Nominalismus	Formalismus

Die von **David Hilbert (1862-1943)** geforderte Theorie zum Beweis der Widerspruchsfreiheit der Mathematik, die Metamathematik oder Beweistheorie, macht die Mathematik selbst zum Gegenstand ihrer Untersuchung, indem sie die Sprache und Beweise einer mathematischen Theorie formal fixiert und nur in formaler Hinsicht ohne Bezugnahme auf die intendierte Bedeutung der formal dargestellten Begriffe untersucht. So konnte etwa **Wilhelm Ackermann (1896-1962)** 1928 beweisen, daß die Arithmetik ohne Multiplikation widerspruchsfrei ist.

Die Resultate von **Kurt Gödel (1906-1978)** zeigen jedoch, daß das Hilbertsche Programm nicht in dem ursprünglich angestrebten starken Sinne durchführbar ist, denn die Beweistheorie muß auch Methoden verwenden, die nicht mehr streng finit sind. Es ergaben sich nun für gewisse Teile der klassischen Mathematik Widerspruchsfreiheitsbeweise mit Methoden, die teilweise völlig konstruktiv sind, teilweise aber nur in einem eingeschränkten Sinne als konstruktiv anzusehen sind, und teilweise völlig nichtkonstruktiv sind.

Das erste wichtige beweistheoretische Ergebnis war der Hauptsatz von **Gerhard Gentzen (1909-1945)**, der 1934 bewies, daß in der klassischen Prädikatenlogik jede Herleitung in einer gewissen umweglosen Weise geführt werden kann, d.h. allein mit Schlüssen, deren Prämissen nur aus Bestandteilen der Konklusion zusammengesetzt sind. Hiermit erweisen sich die von Gentzen als Schnitte bezeichneten Schlüsse, deren einfachster Spezialfall der Schluß von A und $A \rightarrow B$ auf B ist, als eliminierbar. Dies hat den Vorteil, daß aus der Struktur einer logischen Formel Rückschlüsse auf ihre Herleitbarkeit gezogen werden können. Insbesondere erweisen sich formale Systeme, in denen Schnitte eliminierbar sind, in trivialer Weise als widerspruchsfrei.

Für die reine Zahlentheorie, in der nur über natürliche Zahlen, aber nicht wie in der analytischen Zahlentheorie auch über Mengen von natürlichen Zahlen quantifiziert wird, wurde die Widerspruchsfreiheit zuerst von Gerhard Gentzen 1936 bewiesen. Der Beweis, der durch sog. transfinite Induktion bis zu einer bestimmten Ordinalzahl erfolgt, ist zwar nicht streng finit, aber völlig konstruktiv.

Die von Gentzen bei diesen Beweisen verwendeten Methoden der Sequenzenkalküle und der Kalküle des Natürlichen Schliessens sind Gegenstand unserer Vorlesung.

Zeittafel:

Georg Cantor (1845-1918)
Gottlob Frege (1848-1925)
David Hilbert (1862-1943)
Bertrand Russell (1872-1970)
Alfred Tarski (1902-1983)
Kurt Gödel (1906-1978)
Gerhard Gentzen (1909-1945)

Georg Cantor (1845-1918): deutscher Mathematiker; begründete nach Vorarbeiten u.a. von **Bernard Bolzano (1781-1848)** und **Richard Dedekind (1831-1916)** die Mengenlehre. Sein Hauptwerk war die Aufsatzfolge *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten (1879-1883)*.
1873 bewies Cantor, daß die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist; 1878 zeigte Cantor, daß die reelle Gerade bijektiv auf die reelle Ebene und den reellen Raum abgebildet werden kann. 1879 führten ihn Überlegungen im Zusammenhang mit dem Identitätssatz für trigonometrische Reihen zur Konzeption des Ordinalzahlbegriffs und damit zur Grundlegung transfiniter Methoden.
Cantors Mengenbegriff wurzelte in anschaulichen Vorstellungen, so z.B. in seiner Beschreibung einer Menge als einer Zusammenfassung von bestimmten Objekten zu einem Ganzen. Das von ihm und **Gottlob Frege (1848-1925)** verwendete Komprehensionsprinzip (zu jeder Eigenschaft E existiert eine Menge M_E = {x / E trifft auf x zu}) führte zu zahlreichen Widersprüchen, von denen die Russellsche Antinomie der Menge aller Mengen, die sich selbst als Elemente enthalten, die folgenreichste war.
Die dadurch ausgelöste sog. Grundlagenkrise der Mathematik führte einerseits zu verschiedenen wissenschaftstheoretischen Grundlagenpositionen, andererseits zu verschiedenen axiomatischen Grundlegungen der Mengenlehre.

Gottlob Frege (1848-1925): deutscher Mathematiker, Logiker und Philosoph. Durch die Begründung der modernen Logik einer der wichtigsten Wegbereiter der Analytischen Philosophie. Zu seinen Lebzeiten war Frege jedoch nur einem kleinen Kreis von Spezialisten bekannt. Er starb einsam und verbittert, ohne je die ihm gebührende Anerkennung erfahren zu haben.
Die Entwicklung der Prädikatenlogik in seiner *Begriffsschrift (1879)* wird allgemein als der bedeutendste Fortschritt in der Entwicklung der Logik seit der Syllogistik des **Aristoteles (384-322 v.u.Z.)** angesehen. Die Prädikatenlogik ermöglichte eine tiefergehende Analyse der Sätze der Alltagssprache und damit eine Unterscheidung zwischen Oberflächenstruktur und logischer Tiefenstruktur eines Satzes.
In seinem logisch-mathematischen Hauptwerk *Grundgesetze der Arithmetik (Band I, 1893, Bd. II, 1903)* führt Frege das logische System der *Begriffsschrift* weiter. Es handelt von reinen logischen Analysen (Reduktionen) der Grundsätze und Grundbegriffe der Arithmetik und der Theorie der reellen Zahlen.
Einen empfindlichen Rückschlag erhielt Frege, als **Bertrand Russell (1872-1970)** die berühmte nach ihm benannte Antinomie in Freges System entdeckte, der darin die sog. Naiven Mengenlehre von **Georg Cantor (1845-1918)**, dem Begründer der Mengenlehre, verwendete.
Frege befaßte sich als einer der ersten Philosophen mit den Grundlagen der Mathematik, indem er die traditionellen Antworten auf die Fragen ‚Was sind Zahlen?‘ und ‚Welchen erkenntnismäßigen Status hat mathematische Wahrheit?‘ einer vernichtenden Kritik unterzog. In seinem Werk *Die Grundlagen der Arithmetik (1884)* vertrat er das Programm des Logizismus, demzufolge mathematische Begriffe auf logische zurückgeführt werden können. Dieses Programm wurde auch von Russell vertreten.
Mit seinem Aufsatz *Über Sinn und Bedeutung (1892)* trug Frege wesentlich zur Entwicklung der philosophischen Bedeutungslehre bei und leistete damit einen grundlegenden Beitrag zur analytischen Sprachphilosophie. Er unterschied darin zwischen dem Sinn eines Satzes (der Kenntnis seiner Wahrheitsbedingungen) und der Bedeutung eines Satzes (seines Wahrheitswertes).

David Hilbert (1862-1943): deutscher Mathematiker; 1892 Prof. in Königsberg, danach in Göttingen. Leistete auf zahlreichen Gebieten der Mathematik (algebraische Zahlentheorie, Analysis, Geometrie, mathematische Physik, Grundlagenforschung etc.) bedeutende Beiträge.
Von weitreichendem Einfluß war der axiomatische Aufbau der euklidischen Geometrie, die er in seinem berühmten Werk *Grundlagen der Geometrie (1899)* gab.
Auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongress in Paris formulierte Hilbert 1900 seine berühmten 23 Probleme, deren Lösungen bzw. Lösungsversuche wesentliche Impulse für die Entwicklung der Mathematik leisteten. Das zweite dieser Probleme betraf die Widerspruchsfreiheit der Axiome der Arithmetik.
Dem Hilbertschen Programm zufolge ist die Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems das entscheidende Kriterium für seine Brauchbarkeit, unabhängig von Bedeutung oder Wahrheit der Axiome. Dieser auch Formalismus oder Metamathematik genannte Standpunkt führte zur Beweistheorie im engeren Sinne. Diese versuchte, die Widerspruchsfreiheit von Axiomensystemen mit finiten und damit unproblematischen Methoden zu beweisen.
Einen empfindlichen Rückschlag erhielt dieses Programm durch **Kurt Gödel (1906-1978)**, der in seinem Werk *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme (1931)* zeigte, daß sich die Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie nicht mit Mitteln der Zahlentheorie selbst beweisen läßt.

Bertrand Russell (1872-1970): englischer Philosoph, Logiker, Mathematiker, politischer Aufklärer, Publizist und Gesellschaftskritiker. Einer der wichtigsten Vertreter der Analytischen Philosophie der Gegenwart und einer der produktivsten Denker dieses Jahrhunderts. Russell studierte in Cambridge und war dort von 1910-1916 Dozent für Logik und Mathematik. Während des ersten Weltkrieges verlor er aufgrund seines aktiven Pazifismus diese Dozentur und mußte 1918 sogar eine halbjährige Gefängnisstrafe absitzen. Erst 1939 konnte Russell seine akademische Tätigkeit wieder aufnehmen. Seine bedeutendsten Leistungen liegen auf den Gebieten Logik, Philosophie der Mathematik und der Sprache. 1950 wurde Russell mit dem Nobelpreis für Literatur ausgezeichnet.
Russell vertrat gemeinsam mit **Gottlob Frege (1848-1925)** das mathematische Grundlagenprogramm des **Logizismus**, demzufolge mathematische Begriffe auf logische zurückgeführt werden können. Er verfaßte gemeinsam **Alfred North Whitehead (1861-1947)** das berühmte dreibändige Werk *Principia Mathematica (1910-1913)* in dem Bemühen, dieses Programm unter Vermeidung der mengentheoretischen Widersprüche mit Hilfe der sog. Typentheorie auf die gesamte Mathematik anzuwenden. Diese Widersprüche waren in der sog. Naiven Mengenlehre von **Georg Cantor (1845-1918)**, dem Begründer der Mengenlehre, und Freges System aufgetreten. Der berühmteste unter diesen Widersprüchen ist die Russellsche Antinomie der Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Elemente enthalten. Sie besitzt folgende humorvolle Einkleidung: stellen Sie sich einen Dorfbarbier vor, der diejenigen und nur diejenigen Männer des Dorfes rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Rasiert sich der Dorfbarbier jetzt selbst oder nicht? Wenn er sich selbst nicht rasiert, muß er sich definitionsgemäß selbst rasieren, wenn er sich selbst rasiert, darf er sich definitionsgemäß nicht selbst rasieren. Wie wir es drehen und wenden, wir verwickeln uns zwangsläufig in einen Widerspruch.
Gemeinsam mit dem österreichischen Philosophen **Ludwig Wittgenstein (1889-1951)** vertrat Russell das metaphysische Programm des **Logischen Atomismus**, der eine Entsprechung zwischen der Struktur der Sprache und der Struktur der Wirklichkeit annimmt.

Alfred Tarski (1902-1983): polnischer Logiker und Mathematiker; entwickelte in seinem zuerst auf polnisch erschienenen Aufsatz *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen (1933)* die sog. semantische Wahrheitstheorie, indem er als erster eine vollständige Semantik der Prädikatenlogik angab.
Die Ursache der Lügner-Antinomie liegt für Tarski in der semantischen Geschlossenheit der Umgangssprache: diese enthält für jede Aussage einen Namen dieser Aussage. Deshalb kann man für sie keine Definition des Wahrheitsbegriffes angeben, ja diesen nicht einmal widerspruchsfrei verwenden. Für weniger komplizierte – künstliche – Sprachen wie etwa die Prädikatenlogik kann man jedoch den Wahrheitsbegriff definieren. Die Sprache, für die man den Wahrheitsbegriff definiert, und die damit Gegenstand der Untersuchung ist, nennt Tarski Objektsprache. Die Sprache, in der man die Definition formuliert, nennt Tarski Metasprache.

Kurt Gödel (1906-1978): amerikanischer Logiker und Mathematiker österreichischer Herkunft. Emigrierte 1939 in die USA und lehrte in Princeton. Als einer der größten Logiker aller Zeiten leistete er bahnbrechende Beiträge zur mathematischen Grundlagenforschung und zur Mengenlehre.
1930 bewies er die Vollständigkeit der Prädikatenlogik, 1938 bewies er, daß die Mengenlehre widerspruchsfrei bleibt, wenn man die Kontinuumshypothese zum Zermelo-Fraenkelschen Axiomensystem der Mengenlehre hinzunimmt.
Seine bedeutendste Leistung veröffentlichte er in dem Aufsatz *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme (1931)*. In dieser Arbeit bewies Gödel erstens, daß es mathematische Sätze gibt, die sich weder beweisen noch widerlegen lassen. Überdies zeigte er zweitens, daß sich die Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie nicht mit Mitteln der Zahlentheorie selbst beweisen läßt.
Die philosophische Bedeutung dieser beiden sog. Unvollständigkeitssätze liegt darin begründet, daß Gödel hier erstmals die formalen Grenzen mathematischen Wissens aufgezeigt hat und damit jahrhundertelange Vorstellungen von Mathematik zerstört hat. Nicht einmal in der exaktesten Wissenschaft ist es möglich, alles zu wissen, da es Sätze gibt, die sog. unentscheidbaren Sätze, die man weder beweisen noch widerlegen kann.

Gerhard Gentzen (1909-1945): deutscher Logiker und Mathematiker. Bewies in seiner Arbeit *Untersuchungen über das logische Schließen (1934)* den nach ihm benannten Hauptsatz, der besagt, daß in der klassischen Prädikatenlogik jede Herleitung in einer gewissen umweglosen Weise geführt werden kann, d.h. allein mit Schlüssen, deren Prämissen nur aus Bestandteilen der Konklusion zusammengesetzt sind.
Er bewies in seiner Arbeit *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie (1936)* mittels transfiniter Induktion bis zu einer bestimmten Ordinalzahl in völlig konstruktiver, aber nicht streng finiter Weise die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik.

Übungen zu Kapitel 1:

1 Gib Argumente an, die die logische Form (1*)-(4*) haben.

2 Gib Argumente an, die die logische Form (5*)-(8*) haben.

3 Gib Argumente an, die – intuitiv – nicht gültig sind und folgende Voraussetzung erfüllen: alle Prämissen und die Konklusion sind wahr.

4 Gib Argumente an, die – intuitiv – gültig sind und folgende Voraussetzung erfüllen: mindestens eine Prämisse ist falsch.

5 Erkläre den Unterschied zwischen Argument und Argumentform.

6 Gib die logische Form des Argumentes ‚Alle Pferde sind Tiere. Daher sind alle Pferdeköpfe Tierköpfe' an. Ist dieses Argument gültig?

Hinweis zu Übung 6:

Abkürzungen:
$P(a)$ .. a ist ein Pferd
$T(a)$ ... a ist ein Tier
$K(a, b)$ ... a ist Kopf von b

$PK(a)$ ... a ist ein Pferdekopf, wird formalisiert durch: $\exists y(P(y) \wedge K(a, y))$
$TK(a)$ ... a ist ein Tierkopf, wird formalisiert durch: $\exists y(T(y) \wedge K(a, y))$

Das ganze Argument wird dann formalisiert durch:
$\underline{\forall x(P(x) \rightarrow T(x))}$ Empirische Prämisse
$\forall x(PK(x) \rightarrow TK(x))$ Konklusion

oder, wenn man für $PK(x)$ und $TK(x)$ einsetzt:
$\underline{\forall x(P(x) \rightarrow T(x))}$
$\forall x(\exists y(P(y) \wedge K(x, y)) \rightarrow \exists y(T(y) \wedge K(x, y)))$

Dieses Argument ist (prädikaten-)logisch gültig.