2 Hilbert-Frege-Kalküle

2.1 Klassische Aussagenlogik

2.1.1 Syntax

Um die Aussagenlogik zum Objekt einer Untersuchung machen zu können, muß man sie zuerst formalisieren, d.h. eine formale Sprache für die Aussagenlogik angeben.

DEFINITION (formale Sprache):
Eine formale Sprache besteht aus dem Vokabular und der Grammatik dieser Sprache.
(i) das Vokabular (oder Alphabet) dieser Sprache ist eine nichtleere (entscheidbare) Menge von primitiven Symbolen dieser Sprache. Eine endliche Folge von primitiven Symbolen dieser Sprache heißt Ausdruck dieser Sprache.
(ii) die Grammatik dieser Sprache besteht in der Angabe der Menge der wohlgeformten Formeln dieser Sprache; diese Menge ist eine nichtleere (entscheidbare) Teilmenge der Menge der Ausdrücke dieser Sprache.

DEFINITION (formale Sprache für die klassische Aussagenlogik AL):
Das Vokabular (der formalen Sprache für die klassische Aussagenlogik AL) besteht aus einer abzählbar unendlichen Menge AV = $\{p_1, p_2, \ldots\}$ von Aussagenvariablen, aus der Menge $\{\bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ der autonym (als Namen für sich selbst) verwendeten aussagenlogischen Junktoren sowie der Menge {(,)} der ebenfalls autonym verwendeten Hilfszeichen.
Die Menge WFF der wohlgeformten Formeln (der formalen Sprache für die klassische Aussagenlogik AL) wird induktiv definiert durch:
(i) jede Aussagenvariable ist eine Formel
(ii) $\bot$ ist eine Formel (‚Falsum‘)
(iii) ist A eine Formel, dann auch $\neg A$ (‚nicht A‘)
(iv) sind A und B Formeln, dann auch $(A\wedge B)$ (‚A und B‘), $(A\vee B)$ (‚A oder B‘), $(A\rightarrow B)$ (‚A impliziert B‘, ‚wenn A dann B‘)
(v) nichts sonst ist eine Formel

BEMERKUNG:
Elemente von AV werden mitgeteilt durch p, q, r, ... (auch mit Indizes); A, B, C, ... bezeichnen stets Formeln, X, Y, Z, ... stets Formelmengen (auch mit Indizes); $\mathbb{N}_0$ bezeichne die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ vereinigt mit der Menge {0}.
Wir verwende folgende metasprachliche Abkürzungen:
$(A\leftrightarrow B) := ((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$ (‚A material äquivalent mit B‘ oder ‚A genau dann, wenn B‘)
$\top := \neg\bot$(‚Verum‘)
Ferner gelten folgende Klammerersparnisregeln: $\neg$ bindet stärker als $\wedge$ und $\vee$, diese wiederum stärker als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$; die äußeren Klammern einer Formel können weggelassen werden.

BEMERKUNG:
Die Menge der Junktoren heißt auch Signatur. Hätten wir als Signatur z.B. $\{\bot, \neg, \wedge\}$ gewählt, würden $\vee$ und $\rightarrow$ folgendermaßen abgekürzt:
$(A\vee B) := \neg(\neg A\wedge\neg B)$

$(A \to B) := \neg(A \wedge \neg B)$
Hätten wir als Signatur z.B. $\{\bot, \to\}$ gewählt, würden $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ folgendermaßen abgekürzt:
$\neg A := A \to \bot$
$(A \wedge B) := (A \to (B \to \bot)) \to \bot$
$(A \vee B) := (A \to \bot) \to B$
Welche Signatur man wählt, hängt von der Art der jeweiligen Untersuchung ab und ist nicht völlig beliebig (vgl. etwa die Bemerkungen zur vollständigen Junktorenbasis weiter unten).

DEFINITION (einige syntaktische Definitionen):
g: WFF $\to \mathbb{N}_0$, die Anzahl der in der Formel A vorkommenden logischen Zeichen, wird induktiv definiert durch:
(i) $g(p) = 0$ (für alle $p \in AV$)
(ii) $g(\bot) = 0$
(iii) $g(\neg A) = g(A) + 1$
(iv) $g(A \wedge B) = g(A \vee B) = g(A \to B) = g(A) + g(B) + 1$

Var: WFF $\to \wp(AV)$, die Menge der in der Formel A vorkommenden Aussagenvariablen, wird induktiv definiert durch (wobei $\wp(X)$ die Potenzmenge der Menge X bezeichne):
(i) $Var(p) = \{p\}$ (für alle $p \in AV$)
(ii) $Var(\bot) = \emptyset$
(iii) $Var(\neg A) = Var(A)$
(iv) $Var(A \wedge B) = Var(A \vee B) = Var(A \to B) = Var(A) \cup Var(B)$
für endliches X sei $Var(X) := \cup_{A \in X} Var(A)$

Sf: WFF $\to \wp(WFF)$, die Menge der Teilformeln von A, wird induktiv definiert durch:
(i) $Sf(p) = \{p\}$ (für alle $p \in AV$)
(ii) $Sf(\bot) = \{\bot\}$
(iii) $Sf(\neg A) = \{\neg A\} \cup Sf(A)$
(iv) $Sf(A \wedge B) = \{A \wedge B\} \cup Sf(A) \cup Sf(B)$, $Sf(A \vee B) = \{A \vee B\} \cup Sf(A) \cup Sf(B)$, $Sf(A \to B) = \{A \to B\} \cup Sf(A) \cup Sf(B)$
für endliches X sei $Sf(X) := \cup_{A \in X} Sf(A)$

s: WFF $\to$ WFF heißt Substitution gdw (genau dann, wenn) gilt:
$s(\neg A) = \neg s(A)$
$s(A \wedge B) = s(A) \wedge s(B)$
$s(A \vee B) = s(A) \vee s(B)$
$s(A \to B) = s(A) \to s(B)$
SUB sei die Menge aller Substitutionen und $SbX := \{sA / A \in X, s \in SUB\}$

BEMERKUNG:
Eine Substitution s ist eindeutig festgelegt durch alle Werte $s(p)$ ($p \in AV$); mit anderen Worten, es gilt: sind $s, s^* \in SUB$ und $s(p) = s^*(p)$ für alle $p \in AV$, dann ist auch $s(A) = s^*(A)$ für alle $A \in WFF$.
Eine äquivalente Definition von Substitution wäre daher folgende:
s: AV $\to$ WFF heißt Substitution; s wird mit obigen Klauseln (eindeutig) fortgesetzt auf WFF $\to$ WFF.

Eine Substitution s(A) einer Formel A ist also das Resultat der simultanen Ersetzung von p durch s(p) aller in A vorkommenden Aussagenvariablen p.

Sei $X = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ (wir denken uns die Elemente von X in einer beliebigen, aber festen Ordnung gegeben);
$\wedge X$, die Konjunktion aller Formeln aus X, wird induktiv definiert durch:
$\wedge\{A_1\} := A_1$
$\wedge\{A_1, ..., A_m, A_{m+1}\} := \wedge\{A_1, ..., A_m\}\wedge A_{m+1}$ (m<n)
$\vee X$, die Disjunktion aller Formeln aus X, wird induktiv definiert durch:
$\vee\{A_1\} := A_1$
$\vee\{A_1, ..., A_m, A_{m+1}\} := \vee\{A_1, ..., A_m\}\vee A_{m+1}$ (m<n)

DEFINITION (Schlußregel):
$\mathfrak{R}$ heißt n-stellige Schlußregel ($n \in \mathbb{N}$) gdw $\mathfrak{R}$ ist eine (entscheidbare) Teilmenge von WFF^{n+1}.
Jedes $<A_1, ..., A_n, A> \in \mathfrak{R}$ heißt Anwendung von $\mathfrak{R}$ auf die Prämissen $A_1, ..., A_n$ mit der Konklusion A.
$\mathfrak{R}$ heißt strukturell gdw für jede Anwendung $<A_1, ..., A_n, A>$ von $\mathfrak{R}$ gilt: für alle $s \in$ SUB gilt: $<sA_1, ..., sA_n, sA> \in \mathfrak{R}$.
X heißt abgeschlossen gegenüber einer Schlußregel $\mathfrak{R}$ gdw für jede Anwendung $<A_1, ..., A_n, A>$ von $\mathfrak{R}$ gilt: (für alle i ($1 \leq i \leq n$): $A_i \in X) \Rightarrow A \in X$.
$\mathfrak{R}$ heißt Schlußregel gdw $\mathfrak{R}$ eine n-stellige Schlußregel ist für ein $n \in N$.

Beispiele für Schlußregeln sind:
Modus Ponens (MP): $\{<A, A\rightarrow B, B> / A, B \in WFF\}$
Universelle Substitution (US): $\{<A, sA> / A \in WFF, s \in SUB\}$,

Die intendierte Bedeutung des Modus Ponens ist folgende: wenn A und A→B Theoreme der Logik sind, dann auch B. Er wird auch oft in folgender Form geschrieben, wodurch ein Knoten in einem Beweisbaum veranschaulicht wird:

```
...          ...
A            A→B
   \       /
      B
      ...
```

oder in einer etwas kompakteren Schreibweise:

$$\cfrac{\begin{matrix}\dots & \dots \\ A & A\rightarrow B\end{matrix}}{\begin{matrix}B \\ \dots\end{matrix}}$$

LEMMA 1:
(i) (MP) ist strukturell
(ii) (US) ist nicht strukturell

BEWEIS:
(i) da $s(A\to B) = s(A)\to s(B)$ ist, folgt die Behauptung.
(ii) ein Beispiel: $\langle p, p\lor q\rangle \in$ (US) mit $s(p)=p\lor q$; sei $s^*(p)=p\land q$, $s^*(q)=q$, dann ist $\langle s^*(p), s^*(p\lor q)\rangle = \langle p\land q, (p\land q)\lor q\rangle \notin$ (US).

DEFINITION:
Eine Formelmenge X heißt strukturell gdw X abgeschlossen unter (US) ist, d.h. wenn gilt:
$A \in X \Rightarrow sA \in X$ (für jede Substitution s)

DEFINITION (Axiomensystem):
Ein Axiomensystem (für eine Logik) besteht aus einer formalen Sprache, einer Menge von Axiomen der Sprache und einer Menge von Grundschlußregeln der Sprache.
(i) die Menge der Axiome der Sprache ist eine (nichtleere, entscheidbare) Teilmenge von WFF.
(ii) die Menge der Grundschlußregeln der Sprache ist eine (nichtleere, entscheidbare) Menge von Schlußregeln.

ÜBERSICHT (über verwendete Axiomenschemata):
Ax1: $A\to(B\to A)$
Ax2: $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$
Ax3a: $A\land B\to A$ Ax3b: $A\land B\to B$
Ax4: $(A\to B)\to((A\to C)\to(A\to B\land C))$
Ax5a: $A\to A\lor B$ Ax5b: $B\to A\lor B$
Ax6: $(A\to C)\to((B\to C)\to(A\lor B\to C))$
Ax7: $((A\to\neg B)\to((A\to B)\to\neg A))$
Ax8: $\neg\neg A\to A$
Ax9: $((A\to\bot)\to\bot)\to A$
Ax10: $(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$
Ax11: $A\to(B\to A\land B)$
Ax12: $\bot\to A$
Ax13: $A\lor(A\to\bot)$

DEFINITION (das Axiomensystem H1 für die klassische Aussagenlogik AL):
Axiome seien die Menge der folgenden sog. Axiomenschemata, d.h. alle Formeln der folgenden Gestalt:
Ax1: $A\to(B\to A)$
Ax2: $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$
Ax3a: $A\land B\to A$ Ax3b: $A\land B\to B$
Ax4: $(A\to B)\to((A\to C)\to(A\to B\land C))$
Ax5a: $A\to A\lor B$ Ax5b: $B\to A\lor B$
Ax6: $(A\to C)\to((B\to C)\to(A\lor B\to C))$
Ax7: $((A\to\neg B)\to((A\to B)\to\neg A))$
Ax8: $\neg\neg A\to A$
Ax9: $((A\to\bot)\to\bot)\to A$
Einzige Schlußregel sei der Modus Ponens (MP)

BEMERKUNG:
Statt Axiomenschemata sagen wir im folgenden kurz Axiome.
Das Axiomensystem H1 ist in der Signatur $\{\bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ formuliert.
Das Axiomensystem H2 in der gleichen Signatur entsteht aus H1 durch Ersetzen von Ax7 durch Ax10:

Ax1: $A\rightarrow(B\rightarrow A)$
Ax2: $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$
Ax3a: $A\wedge B\rightarrow A$ Ax3b: $A\wedge B\rightarrow B$
Ax4: $(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow B\wedge C))$
Ax5a: $A\rightarrow A\vee B$ Ax5b: $B\rightarrow A\vee B$
Ax6: $(A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\vee B\rightarrow C))$
Ax8: $\neg\neg A\rightarrow A$
Ax9: $((A\rightarrow\bot)\rightarrow\bot)\rightarrow A$
Ax10: $(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow(B\rightarrow A)$

Das Axiomensystem H3 in der Signatur $\{\neg, \rightarrow\}$ besteht aus Ax1, Ax2 und Ax8:
$A\rightarrow(B\rightarrow A)$
$(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$
$\neg\neg A\rightarrow A$

Das Axiomensystem H4 in der Signatur $\{\bot, \rightarrow\}$ besteht aus Ax1, Ax2 und Ax9:
$A\rightarrow(B\rightarrow A)$
$(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$
$((A\rightarrow\bot)\rightarrow\bot)\rightarrow A$

Das Axiomensystem H5 in der Signatur $\{\bot, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ besteht aus Ax1, Ax2, Ax3a, Ax3b, Ax5a, Ax5b, Ax6, Ax9, Ax11 und Ax12:
Ax1: $A\rightarrow(B\rightarrow A)$
Ax2: $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$
Ax3a: $A\wedge B\rightarrow A$ Ax3b: $A\wedge B\rightarrow B$
Ax11: $A\rightarrow(B\rightarrow A\wedge B)$
Ax5a: $A\rightarrow A\vee B$ Ax5b: $B\rightarrow A\vee B$
Ax6: $(A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\vee B\rightarrow C))$
Ax12: $\bot\rightarrow A$
Ax9: $((A\rightarrow\bot)\rightarrow\bot)\rightarrow A$

Das Axiomensystem H6 in der Signatur $\{\bot, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ besteht aus Ax1, Ax2, Ax3a, Ax3b, Ax5a, Ax5b, Ax6, Ax11, Ax12 und Ax13:
Ax1: $A\rightarrow(B\rightarrow A)$
Ax2: $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$
Ax3a: $A\wedge B\rightarrow A$ Ax3b: $A\wedge B\rightarrow B$
Ax11: $A\rightarrow(B\rightarrow A\wedge B)$
Ax5a: $A\rightarrow A\vee B$ Ax5b: $B\rightarrow A\vee B$
Ax6: $(A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\vee B\rightarrow C))$
Ax12: $\bot\rightarrow A$
Ax13: $A\vee(A\rightarrow\bot)$

BEMERKUNG (zur Minimallogik):
Die minimale Logik (in der Signatur $\{\bot, \wedge, \vee, \rightarrow\}$) erhält man aus H5 genau dann, wenn man Ax9 und Ax12 weglässt:
Ax1: $A\rightarrow(B\rightarrow A)$
Ax2: $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$
Ax3a: $A\wedge B\rightarrow A$ Ax3b: $A\wedge B\rightarrow B$
Ax11: $A\rightarrow(B\rightarrow A\wedge B)$
Ax5a: $A\rightarrow A\vee B$ Ax5b: $B\rightarrow A\vee B$
Ax6: $(A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\vee B\rightarrow C))$

BEMERKUNG (zur intuitionistischen Logik):
Die intuitionistische Logik (in der Signatur $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$) erhält man aus H1 genau dann, wenn man Ax8 und Ax9 weglässt:
Ax1: $A\rightarrow(B\rightarrow A)$
Ax2: $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$
Ax3a: $A\wedge B\rightarrow A$ Ax3b: $A\wedge B\rightarrow B$
Ax4: $(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow B\wedge C))$
Ax5a: $A\rightarrow A\vee B$ Ax5b: $B\rightarrow A\vee B$
Ax6: $(A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\vee B\rightarrow C))$
Ax7: $((A\rightarrow\neg B)\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow\neg A))$
Die intuitionistische Logik (in der Signatur $\{\bot, \wedge, \vee, \rightarrow\}$) erhält man aus H5 genau dann, wenn man Ax9 weglässt:
Ax1: $A\rightarrow(B\rightarrow A)$
Ax2: $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$
Ax3a: $A\wedge B\rightarrow A$ Ax3b: $A\wedge B\rightarrow B$
Ax11: $A\rightarrow(B\rightarrow A\wedge B)$
Ax5a: $A\rightarrow A\vee B$ Ax5b: $B\rightarrow A\vee B$
Ax6: $(A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\vee B\rightarrow C))$
Ax12: $\bot\rightarrow A$

BEMERKUNG (zur Prädikatenlogik):
Die Sprache der klassischen Prädikatenlogik erster Stufe (ohne Konstanten, Funktionszeichen und Gleichheit) besteht aus:
einer abzählbar unendlichen Menge freier Variablen $a_1, a_2, \ldots$,
einer abzählbar unendlichen Menge gebundener Variablen $x_1, x_2, \ldots$,
für jedes $n \geq 1$ aus einer gewissen, höchstens abzählbar unendlichen Menge von n-stelligen Prädikatenvariablen $P^n{}_1, P^n{}_2, \ldots$,
der Menge der Junktoren $\{\bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$,
der Menge der Quantoren $\{\forall, \exists\}$,
und der Menge der Hilfszeichen {(,), ,}.
A[t] bezeichne eine Zeichenreihe, in der der Term t an bestimmten Stellen (also mindestens einer Stelle) vorkommt; A[x] bezeichne dann jene Zeichenreihe, die aus A[t] dadurch entsteht, wenn der Term t an diesen bestimmten Stellen (also mindestens an einer, aber nicht notwendigerweise an allen) durch die gebundene Variable x ersetzt wird.
Die Menge der Formeln der Prädikatenlogik wird induktiv definiert durch:

(i) ist P^n eine n-stellige Prädikatenvariable und sind $t_1, ..., t_n$ Terme, so ist $P^n(t_1, ..., t_n)$ eine (Prim-)Formel
(ii) $\bot$ ist eine (Prim-)Formel
(iii) sind A und B Formeln, dann auch $\neg A$, $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$ und $(A\rightarrow B)$
(iv) ist A[a] eine Formel, in der die gebundene Variable x nicht vorkommt, so sind $\exists xA[x]$ (‚es gibt ein x mit A[x]') und $\forall xA[x]$ (‚für alle x gilt A[x]') Formeln
Die Axiomenschemata der Prädikatenlogik sind:
(i) alle Axiomenschemata von H1
(ii) alle Formeln der Gestalt $A[t]\rightarrow\exists xA[x]$
(iii) alle Formeln der Gestalt $\forall xA[x]\rightarrow A[t]$
Die Grundschlußregeln der Prädikatenlogik sind:
Modus Ponens (MP),
Existentielle Generalisierung (EG): $\dfrac{A[a]\rightarrow B}{\exists xA[x]\rightarrow B}$ (VB)
Universelle Generalisierung (UG): $\dfrac{A\rightarrow B[a]}{A\rightarrow\forall xB[x]}$ (VB)
wobei (VB) die Variablenbedingung ist: die freie Variable a kommt unter dem Strich nicht mehr vor.

DEFINITION (Herleitbarkeit):
$\mathfrak{R}$* sei eine Menge von Schlußregeln.
A heißt herleitbar aus X mit $\mathfrak{R}$* gdw es eine Formelfolge $A_1, ..., A_n$ ($n \in \mathbb{N}$) gibt mit:
$A_n = A$ und
für alle i ($1\leq i\leq n$): $A_i \in X$ oder es gibt ein $\mathfrak{R} \in \mathfrak{R}^*$ mit $\mathfrak{R} = \langle A_{j1}, ..., A_{jk}, A_i\rangle$ und $j_l < i$ ($1\leq l\leq k$).
$A_1, ..., A_n$ heißt dann Herleitung von A aus X mit $\mathfrak{R}$*.
Die Herleitungsordnung von A (bzgl. X und $\mathfrak{R}$*) sei die minimale Anzahl von Formeln in einer Herleitung von A aus X mit $\mathfrak{R}$* ($h_{X,\mathfrak{R}^*}(A) := \min\{n \in \mathbb{N} / A_1, ..., A_n$ ist eine Herleitung von A aus X mit $\mathfrak{R}^*\}$).
In einem Beweis wird die Induktion nach der Herleitungsordnung einer Formel auch kurz mit Herleitungsinduktion bezeichnet.

DEFINITION (aussagenlogische Herleitbarkeit):
Die Menge der aussagenlogisch herleitbaren Formeln PC sei die Menge der Formeln, die aus Ax1-Ax9 mit Modus Ponens (MP) herleitbar ist.
PC wird auch oft als Menge der aussagenlogischen Theoreme bezeichnet. Dann besagt diese Definition nichts anderes, als daß der Begriff des Theorems induktiv definiert wird durch:
alle Axiome sind Theoreme
sind A und $A\rightarrow B$ Theoreme, dann auch B

LEMMA 2:
$A\rightarrow A$ ist aussagenlogisch herleitbar (d.h. $A\rightarrow A$ ist ein aussagenlogisches Theorem, oder $A\rightarrow A \in PC$)

BEWEIS:
Der Veranschaulichung des Modus Ponens gemäß haben wir einen Beweisbaum zu finden, dessen Wurzeln alles Axiome sind, und dessen Übergänge sich alle nach der Regel des Modus Ponens vollziehen; hier ist ein solcher Beweisbaum:

$$\dfrac{\dfrac{(A\to((A\to A)\to A))\to((A\to(A\to A))\to(A\to A)) \qquad A\to((A\to A)\to A)}{(A\to(A\to A))\to(A\to A)} \qquad A\to(A\to A)}{A\to A}$$

In linearisierter Form (gemäß der Definition) schreiben wir diese fünf Formeln einfach hintereinander.

LEMMA 3 (Charakterisierung von PC):
PC ist die kleinste Formelmenge, die alle Axiome enthält und abgeschlossen ist gegenüber (MP) (d.i. der Durchschnitt aller Mengen, die alle Axiome enthalten und abgeschlossen sind gegenüber (MP)).

BEWEIS:
Durch Herleitungsinduktion; sei PC‘ die kleinste Formelmenge, die alle Axiome enthält und abgeschlossen ist gegenüber (MP); PC enthält alle Axiome und ist abgeschlossen gegenüber (MP), also ist PC‘ $\subseteq$ PC. Andererseits ist PC in jeder Menge enthalten, die alle Axiome enthalten und abgeschlossen sind unter (MP), also ist PC $\subseteq$ PC‘.

LEMMA 4 (alternative Charakterisierung von PC):
Der Einfachheit beschränken wir uns hier auf die Signatur $\{\neg, \to\}$;
Ak* sei die Menge, die aus folgenden Axiomen besteht:
$p\to(q\to p)$, $(r\to(p\to q))\to((r\to p)\to(r\to q))$, $\neg\neg p\to p$
Ak sei SbAk*, d.i. die Menge der folgenden sog. Axiomenschemata:
$A\to(B\to A)$, $(C\to(A\to B))\to((C\to A)\to(C\to B))$, $\neg\neg A\to A$
Axiomensystem 1 bestehe aus Ak und (MP); PC sei die Menge der Formeln, die aus Ak mit (MP) herleitbar sind;
Axiomensystem 2 bestehe aus Ak*, (MP) und (US); PC* sei die Menge der Formeln, die aus Ak* mit (MP) und (US) herleitbar sind; dann gilt:
(i) PC* sei die kleinste Formelmenge, die Ak* enthält und abgeschlossen ist gegenüber (MP) und (US) (d.i. der Durchschnitt aller Mengen, die Ak* enthalten und abgeschlossen sind gegenüber (MP) und (US))
(ii) PC = PC*
(iii) PC ist strukturell

BEWEIS:
(i) analog.
(ii) Jede Formel, die aus Ak mit (MP) herleitbar ist, ist klarerweise auch aus Ak* mit (MP) und (US) herleitbar. Sei umgekehrt A eine Formel, die aus Ak* mit (MP) und (US) herleitbar ist; da die Hintereinanderausführung zweier Substitutionen wieder eine Substitution ist und (MP) strukturell ist, lassen sich alle Substitutionen an den Anfang der Herleitung vorverlegen.
(iii) folgt aus (i) und (ii).

DEFINITION (Folgerungsbegriffe, Konsequenzrelationen und deduktive Systeme):
$\vdash$ heißt Folgerungsbegriff gdw $\vdash\ \subseteq \wp(\mathrm{WFF}) \times \mathrm{WFF}$.
Für $\langle X, A\rangle \in\ \vdash$ schreiben wir auch $X \vdash A$.
$\vdash$ heißt Konsequenzrelation gdw gilt:
a) $A \in X \Rightarrow X \vdash A$ (Reflexivität)
b) $X \vdash A$ und $X \subseteq Y \Rightarrow Y \vdash A$ (linke Monotonie)
c) (für alle $A \in Y$: $X \vdash A$), $Y \vdash B \Rightarrow X \vdash B$ (Abschlußeigenschaft)
$\vdash$ heißt deduktives System gdw zusätzlich gilt:
d) $X \vdash A \Rightarrow$ es gibt ein endliches $Y \subseteq X$ mit $Y \vdash A$ (Endlichkeit)

LEMMA 5:
$\vdash$ ist ein deduktives System gdw $\vdash$ erfüllt a, b, d und:
c*) $X \cup \{B\} \vdash A$, $X \vdash B \Rightarrow X \vdash A$ (Transitivität)

BEWEIS:
$\Rightarrow$: es gelte $X \cup \{B\} \vdash A$, $X \vdash B$; dann gibt es $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \in X$ mit: $\{A_1, \ldots, A_n, B\} \vdash A$ und $\{B_1, \ldots, B_m\} \vdash B \Rightarrow \{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m, B\} \vdash A$ und $\{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m\} \vdash B$; setze $Y = \{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m, B\}$, dann gilt $Y \vdash A$ und für alle $A^* \in Y$: $X \vdash A^*$; mit c) folgt $X \vdash A$.
$\Leftarrow$: es gelte umgekehrt (für alle $A \in Y$: $X \vdash A$), $Y \vdash B$; dann gibt es $A_1, \ldots, A_n \in Y$ mit $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash B$ und es gibt $B_{1j}, \ldots, B_{mj} \in X$ mit $\{B_{1j}, \ldots, B_{mj}\} \vdash A_j$ ($1 \leq j \leq n$); sei $B^* = \cup_{1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq nj} \{B_{ij}\} \Rightarrow \{A_1, \ldots, A_n\} \cup B^* \vdash B$ und $\{A_2, \ldots, A_n\} \cup B^* \vdash A_1$; setze $X^* = \{A_2, \ldots, A_n\} \cup B^*$, dann gilt $X \vdash A_1$, $X^* \cup \{A_1\} \vdash B$; mit c*) folgt $X^* \vdash B$; n-malige Anwendung dieses Arguments liefert $B^* \vdash B$ und damit die Behauptung.

DEFINITION (syntaktische Folgerung):
Wir definieren folgenden syntaktischen Folgerungsbegriff:
$X \vdash_{HF} A$ gdw A aus X und allen Axiomenschemata mit (MP) herleitbar ist

LEMMA 6:
$\vdash_{HF}$ ist ein deduktives System

BEWEIS:
a), b) und d) sind klar; man zeigt c*):
sei $X \cup \{B\} \vdash A$ und $X \vdash B$; z.z.: $X \vdash A$; dies veranschaulicht sich leicht in einem Beweisbaum:
aus

$$\dfrac{X \qquad\qquad B}{A}$$

und

$$\dfrac{X}{B}$$

wird

$$\dfrac{X \qquad\qquad \dfrac{X}{B}}{A}$$

DEFINITION (ein anderer syntaktischer Folgerungsbegriff):
Wir definieren folgenden zweiten syntaktischen Folgerungsbegriff, wobei wir jetzt tatsächlich Axiome statt Axiomenschemata annehmen, d.h. Ax1 lautet jetzt $p \to (q \to p)$; analog für Ax2 bis Ax9:
$X \vdash_{HF^*} A$ gdw A aus X und allen Axiomen mit (MP) und (US) herleitbar ist

LEMMA 7:
(i) $\vdash_{HF^*}$ ist ein deduktives System
(ii) $X \vdash_{HF} A \Rightarrow X \vdash_{HF^*} A$
(iii) Diese Implikation ist nicht umkehrbar

BEWEIS:
(i) analog
(ii) klar
(iii) es gilt z.B.: $p \vdash_{HF^*} p \wedge \neg p$, wie man leicht sieht, aber nicht $p \vdash_{HF} p \wedge \neg p$, wie spätere semantische Überlegungen zur Vollständigkeit zeigen werden.

SATZ 1 (Deduktionstheorem für $\vdash_{HF}$):
$X \cup \{A\} \vdash_{HF} B$ gdw $X \vdash_{HF} A \to B$

BEWEIS:
$\Rightarrow$: nach Voraussetzung gibt es einen Beweisbaum der folgenden Gestalt:

$$\begin{array}{llll}
A & X_1, \ldots, X_k & & Y_1, \ldots, Y_m \\
\backslash & \quad | \ldots & & / \ldots \\
 & \underline{C \to D} & \underline{} & \underline{C} \\
 & & D & \\
 & \ldots & | & \ldots \\
 & & B &
\end{array}$$

wobei alle $X_i \in X$, und alle Y_j Axiome sind; vor jede Formel Z in diesem Beweisbaum schreiben wir $A \to$, sodaß jede Formel Z sich in die Formel $A \to Z$ transformiert; der transformierte Beweisbaum sieht dann so aus:

$$\begin{array}{llll}
A \to A & A \to X_1, \ldots, A \to X_k & & A \to Y_1, \ldots, A \to Y_m \\
\backslash & \quad | \ldots & & / \ldots \\
 & \underline{A \to (C \to D)} & \underline{} & \underline{A \to C} \\
 & & A \to D & \\
 & \ldots & | & \ldots \\
 & & A \to B &
\end{array}$$

es bleibt zu zeigen, daß dieser Beweisbaum ein Beweisbaum für $A \to B$ ist, der Voraussetzungen aus X und den Axiomen benützt:
wir haben bereits gesehen, daß $A \to A$ aus den Axiomen herleitbar ist;
$A \to X_1$ ist aus $X_1 \to (A \to X_1)$ und X_1 herleitbar (analog für alle anderen Formeln);

es bleibt zu zeigen, daß die Transformation von Instanzen des (MP) die Herleitbarkeit erhält: nach Voraussetzung gibt es Herleitungen von $A \to (C \to D)$ und $A \to C$, der Voraussetzungen aus X und den Axiomen benützt; betrachten Sie folgenden Baum:

$$\dfrac{\dfrac{(A \to (C \to D)) \to ((A \to C) \to (A \to D)) \qquad A \to (C \to D)}{(A \to C) \to (A \to D)} \qquad A \to C}{A \to D}$$

$\Leftarrow$: wenn $X \vdash_{HF} A \to B$, dann auch $X \cup \{A\} \vdash_{HF} A \to B$, und auch $X \cup \{A\} \vdash_{HF} A$; mit (MP) folgt die Behauptung.

LEMMA 8:
$A \in PC$ gdw $\varnothing \vdash_{HF} A$ (gdw $\varnothing \vdash_{HF*} A$)

BEWEIS:
klar

BEMERKUNG:
Wir schreiben daher dafür, daß A ein Theorem ist, auch kurz $\vdash_{HF} A$

In diesem Fall sagt man auch, daß der Folgerungsbegriff $\vdash_{HF}$ die Formelmenge der Theoreme PC, oder die Logik PC erzeugt. Wir sehen also, daß verschiedene Folgerungsbegriffe dieselben Formelmengen erzeugen können.
PC heißt auch Logik im engeren Sinne, $\vdash_{HF}$ heißt auch Logik im weiteren Sinne.
Das Deduktionstheorem ist für $\vdash_{HF*}$ nicht gültig; es gilt sogar folgendes Lemma, das wir ohne Beweis formulieren wollen:

LEMMA 9:
(i) für jede Logik L gibt es höchstens einen Folgerungsbegriff, für den das Deduktionstheorem gilt und der diese Logik erzeugt.
(ii) zu jeder strukturellen Logik L gibt es genau dann einen Folgerungsbegriff, für den das Deduktionstheorem gilt und der diese Logik erzeugt, wenn Ax1 und Ax2 $\in$ L und L abgeschlossen gegenüber (MP) ist.

BEWEIS:
Vgl. Rautenberg (1979, 78).

Daraus folgt, daß $\vdash_{HF}$ der einzige Folgerungsbegriff ist, für den das Deduktionstheorem gilt und der PC erzeugt.
In der Folge betrachten wir nur mehr diesen Folgerungsbegriff und schreiben dafür kurz $X \vdash A$ (bzw. $\vdash A$ für A ist ein Theorem); falls $X \vdash A$ gilt, sagen wir auch, die Deduktion $X \vdash A$ sei (aussagenlogisch) beweisbar. Wir wiederholen folgenden Sachverhalt:

DEFINITION (syntaktische Folgerung $X \vdash_{HF} A$ bzw. $X \vdash A$):
A heißt syntaktische Folgerung aus X, $X \vdash A$, gdw es eine endliche Formelfolge $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gibt, eine aussagenlogische Herleitung von A aus X, sodaß:
(i) $A_n = A$
(ii) Für alle $m \leq n$ gilt:

A_m ist ein Axiom oder
$A_m \in X$ oder
es gibt A_i, A_j (i, j < m) aus der Folge mit $A_j = A_i \rightarrow A_m$

$h_X(A) := \min \{n \in \mathbb{N} / A_1, A_2, ..., A_n$ ist eine Herleitung von A aus X}, falls $X \vdash A$
Oftmals wird auch folgende Formulierung zur Definition des syntaktischen Folgerungsbegriffes verwendet:

LEMMA 10 (iteriertes Deduktionstheorem):
$X \vdash A$ gdw es gibt $B_1, ..., B_n \in X$ mit: $\vdash B_1 \wedge ... \wedge B_n \rightarrow A$

BEWEIS:
$\Rightarrow$: sei $X \vdash A$: dann gibt es $B_1, ..., B_n \in X$ mit $B_1, ..., B_n \vdash A$; die Behauptung folgt mit Induktion nach n: für n=1 ist dies das Deduktionstheorem; für n = 2 (oder den Induktionsschritt) bleibt zu zeigen, daß gilt: $\vdash B_1 \rightarrow (B_2 \rightarrow A) \Rightarrow \vdash (B_1 \wedge B_2) \rightarrow A$;
$\Leftarrow$: es gibt $B_1, ..., B_n \in X$ mit: $\vdash B_1 \wedge ... \wedge B_n \rightarrow A$; dann gilt auch $X \vdash B_1 \wedge ... \wedge B_n$ (wegen: $X \vdash B_1$ und $X \vdash B_2$ und $\vdash B_1 \rightarrow (B_2 \rightarrow (B_1 \wedge B_2))$) und $X \vdash B_1 \wedge ... \wedge B_n \rightarrow A$; mit (MP) folgt die Behauptung.

Dies bedeutet, daß man den Begriff der syntaktischen Folgerung reduzieren kann auf den Begriff der aussagenlogischen Herleitbarkeit (auf den Begriff des Theorems von PC)!

LEMMA 11:
Folgende Formeln sind aussagenlogische Theoreme:
B1: $\vdash \neg A \leftrightarrow (A \rightarrow \bot)$
B2: $\vdash \bot \leftrightarrow A \wedge \neg A$
B3: $\vdash A \vee \neg A$
B4: $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
B5: $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
B6: $\vdash A \wedge \neg A \rightarrow B$
B7: $\vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$
B8: $\vdash \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg (A \vee B))$
B9: $\vdash (\neg A \rightarrow \bot) \rightarrow A$
Folgende Deduktionen sind beweisbar:
B10: $A, A \rightarrow B \vdash B$
B11: $A, B \vdash A \wedge B$
B12: $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \wedge B \rightarrow C$

BEWEIS:
ÜBUNG

Weitere allgemeine mögliche Eigenschaften von Folgerungsbegriffen:
$A \in X \Rightarrow X \vdash A$ (Reflexivität)
$X \vdash A$ und $X \subseteq Y \Rightarrow Y \vdash A$ (linke Monotonie)
$X \vdash A$ und $X \vdash B \Rightarrow X \cup \{A\} \vdash B$ (eingeschränkte Monotonie)
$X \cup \{B\} \vdash A$ und $X \vdash B \Rightarrow X \vdash A$ (Transitivität)

$X \cup \{B\} \vdash A$ und $Y \vdash B \Rightarrow X \cup Y \vdash A$ (Transitivität, Variante 2)
$B \in Sf(X \cup \{A\})$: $X \cup \{B\} \vdash A$ und $X \vdash B \Rightarrow X \vdash A$ (analytischer Schnitt)
(für alle $A \in Y$: $X \vdash A$) und $Y \vdash B \Rightarrow X \vdash B$ (Abschlußeigenschaft)
$X \vdash A \Rightarrow$ es gibt ein endliches $Y \subseteq X$ mit $Y \vdash A$ (Endlichkeit)
$X \cup \{A\} \vdash B$ gdw $X \vdash A \rightarrow B$ (Deduktionstheorem)
für alle Substitutionen s gilt: $X \vdash A \Rightarrow sX \vdash sA$ (abgeschlossen unter Substitution)
für alle Substitutionen s gilt: $X \vdash A \Rightarrow X \vdash sA$ (abgeschlossen unter der Substitutionsregel)
$X \vdash A$ und $A \leftrightarrow B \Rightarrow X \vdash B$ (abgeschlossen unter L-äquivalenter Umformung der Konklusion)

LEMMA 12:
(i) Reflexivität und die zweite Variante der Transitivität implizieren linke Monotonie
(ii) $\vdash_{HF*}$ ist abgeschlossen unter der Substitutionsregel, $\vdash_{HF}$ nicht

BEWEIS:
(i) sei $X \vdash A$ und $X \subseteq Y$; es gilt $\{B\} \cup \{A\} \vdash A$ und $X \vdash A$; daher gilt $X \cup \{B\} \vdash A$; außerdem gilt für alle $B \in Y$, daß $Y \vdash B$; daraus folgt $X, Y \vdash A$.
(ii) es gilt z.B. $p \vdash_{HF} p$, aber nicht $p \vdash_{HF} q$.

DEFINITION (Konsistenz, Inkonsistenz und maximale Konsistenz):
X heißt inkonsistent gdw $X \vdash A$ für alle $A \in WFF$, ansonsten konsistent.
X heißt maximal konsistent gdw X konsistent ist und für alle $A \in WFF$ gilt: $A \notin X$ gdw $X \cup \{A\}$ ist inkonsistent.

LEMMA 13:
(i) X ist inkonsistent gdw es gibt ein $A \in WFF$ mit $X \vdash A \wedge \neg A$
(ii) X ist inkonsistent gdw es gibt ein $A \in WFF$ mit $X \vdash A$ und $X \vdash \neg A$
(iii) X ist inkonsistent gdw $X \vdash \bot$
(iv) X ist maximal konsistent gdw X ist konsistent und für alle $A \in WFF$ gilt: $A \in X$ oder $\neg A \in X$

BEWEIS:
(i) es ist $\vdash A \wedge \neg A \rightarrow B$ für alle $B \in WFF$.
(ii) es ist $\vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ für alle $B \in WFF$.
(iii) es ist $\vdash \bot \rightarrow B$ für alle $B \in WFF$.
(iv) sei X maximal konsistent nach Definition; angenommen, es gibt ein $B \in WFF$ mit $A \notin X$ und $\neg A \notin X$, dann sind $X \cup \{A\}$ und $X \cup \{\neg A\}$ beide inkonsistent, d.h. $X, A \vdash \bot$ und $X, \neg A \vdash \bot$; mit dem Deduktionstheorem folgt, daß $X \vdash A \rightarrow \bot$ und $X \vdash \neg A \rightarrow \bot$, also auch $X \vdash \neg A$ und $X \vdash \neg\neg A$; daher ist X inkonsistent;
sei umgekehrt X maximal konsistent nach Behauptung des Lemmas; angenommen es gibt ein $B \in WFF$ mit entweder ($B \notin X$ und $X \cup \{B\}$ ist konsistent) oder ($B \in X$ und $X \cup \{B\}$ ist inkonsistent); dann gilt im ersten Fall, daß $\neg B \in X$ und damit $X, B \vdash \neg B$; da $X, B \vdash B$ gilt, ist X, B inkonsistent; im zweiten Fall ist $X \vdash B$, und auch $X, B \vdash \bot$; also ist X inkonsistent.

LEMMA 14:
Sei X maximal konsistent; dann gilt:
(i) $\bot \notin X$
(ii) $\neg A \in X$ gdw $A \notin X$
$A \wedge B \in X$ gdw $A \in X$ und $B \in X$
$A \vee B \in X$ gdw $A \in X$ oder $B \in X$
$A \rightarrow B \in X$ gdw wenn $A \in X$ dann $B \in X$
(iii) $PC \subseteq X$, d.h. $PC \subseteq \cap X$
(iv) $A \in X$ und $A \rightarrow B \in PC \Rightarrow B \in X$
(v) (für alle X gilt: $A \in X$) $\Rightarrow A \in PC$, d.h. $\cap X \subseteq PC$
(vi) $X \vdash A$ gdw $A \in X$
(vii) $X \vdash \neg A$ gdw nicht $X \vdash A$ (ein derartiges X heißt auch Henkin-Menge)

BEWEIS:
(i) klar.
(ii) sei $\neg A \in X$; wäre $A \in X$, wäre X inkonsistent; sei umgekehrt $A \notin X$, dann gilt $\neg A \in X$.
sei $A \wedge B \in X$; dann $X \vdash A \wedge B$ und auch $X \vdash A$; angenommen $A \notin X$, dann $\neg A \in X$ und X wäre inkonsistent; sei umgekehrt $A \in X$ und $B \in X$, dann $X \vdash A$ und $X \vdash B$; dann auch $X \vdash A \wedge B$; angenommen $A \wedge B \notin X$, dann $\neg(A \wedge B) \in X$ und $X \vdash \neg(A \wedge B)$.
sei $A \vee B \in X$; dann $X \vdash A \vee B$; angenommen $A \notin X$ und $B \notin X$, dann $\neg A \in X$ und $\neg B \in X$, und $X \vdash \neg A$ und $X \vdash \neg B$; wegen $X \vdash \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \vee B))$ ist X inkonsistent; sei umgekehrt etwa $A \in X$, dann auch $X \vdash A$ und $X \vdash A \vee B$; wäre $A \vee B \notin X$, dann $\neg(A \vee B) \in X$ und $X \vdash \neg(A \vee B)$.
sei $A \rightarrow B \in X$ und $A \in X$, dann gilt $X \vdash A \rightarrow B$ und $X \vdash A$ und mit (MP) auch $X \vdash B$; wäre $B \notin X$, wäre X inkonsistent; sei umgekehrt $A \rightarrow B \notin X$, dann ist $\neg(A \rightarrow B) \in X$ und auch $X \vdash \neg(A \rightarrow B)$; dann gilt aber auch $X \vdash A \wedge \neg B$ und damit $X \vdash A$ und $X \vdash \neg B$; dann gilt aber auch $A \in X$ und $\neg B \in X$, da X sonst inkonsistent wäre.
(iii) für jedes Axiom Ax gilt $Ax \in X$; denn es ist $X \vdash Ax$; wäre $Ax \notin X$, wäre $\neg Ax \in X$ und damit X inkonsistent; ist $A \in X$ und $A \rightarrow B \in X$, dann gilt auch $B \in X$.
(iv) ist $A \in X$ und $A \rightarrow B \in PC$, dann gilt auch $A \rightarrow B \in X$ und damit auch $B \in X$.
(v) (für alle X gilt: $A \in X$) $\Rightarrow A \in PC$: ÜBUNG
(vi) wenn $A \in X$, dann $X \vdash A$; sei umgekehrt $X \vdash A$; angenommen $A \notin X$, dann wäre $\neg A \in X$ und damit $X \vdash \neg A$.
(vii) folgt aus (ii) und (vi).

LEMMA 15 (Konsistenzlemma):
$X \vdash A$ gdw $X \cup \{\neg A\}$ ist inkonsistent

BEWEIS:
Sei $X \vdash A$, dann ist $X \cup \{\neg A\} \vdash A$ und $X \cup \{\neg A\} \vdash \neg A$, also ist $X \cup \{\neg A\}$ inkonsistent; sei umgekehrt $X \cup \{\neg A\}$ inkonsistent, dann ist $X \cup \{\neg A\} \vdash \bot$, also auch $X \vdash \neg A \rightarrow \bot$, also auch $X \vdash \neg\neg A$ und damit $X \vdash A$.

LEMMA 16:
(i) $PC \neq WFF$ (Existenz maximaler Mengen ??)
(ii) PC ist konsistent (aber nicht maximal konsistent)

BEWEIS:
(i) Wäre $\bot \in$ PC, dann auch $\bot \in$ X für jedes maximal konsistente X
(ii) wäre PC $\vdash \bot$, dann auch X $\vdash \bot$ für jedes maximal konsistente X.

Wir halten außerdem nochmals fest, daß für X $\vdash$ A der Endlichkeitssatz gilt:

LEMMA 17 (syntaktische Endlichkeit):
X $\vdash$ A gdw es gibt ein endliches $X_0 \subseteq X$ mit $X_0 \vdash A$.
Dies ist äquivalent zu: X ist konsistent gdw jedes endliche $X_0 \subseteq X$ konsistent ist.

BEWEIS:
Wir beweisen die Äquivalenz mit der zweiten Formulierung:
$\Rightarrow$: sei X konsistent; angenommen es gibt ein endliches $X_0 \subseteq X$ mit $X_0 \vdash \bot$, dann gilt auch X $\vdash \bot$; sei X inkonsistent, dann gilt X $\vdash \bot$, dann gibt es ein endliches $X_0 \subseteq X$ mit $X_0 \vdash \bot$, also ist bereits ein endliches X_0 inkonsistent.
$\Leftarrow$: sei X $\vdash$ A, dann ist $X \cup \{\neg A\}$ inkonsistent, daher gibt es ein endliches $X_0 \subseteq X$ mit $X_0 \cup \{\neg A\}$ ist inkonsistent, d.h. $X_0 \cup \{\neg A\} \vdash \bot$, also auch $X_0 \vdash \neg A \rightarrow \bot$, also auch $X_0 \vdash A$.

LEMMA 18 (Lindenbaum):
Wenn X konsistent ist, dann gibt es ein maximal konsistentes Y mit $X \subseteq Y$.

BEWEIS:
Sei $A_1, A_2, \ldots$ eine Aufzählung der (abzählbar unendlichen) Menge WFF; sei $Y_0 = X$ und:
$Y_{n+1} = Y_n \cup \{A_n\}$, falls $Y_n \cup \{A_n\}$ konsistent ist,
$Y_{n+1} = Y_n$, falls $Y_n \cup \{A_n\}$ inkonsistent ist,
$Y = \cup_{n\geq 0} Y_n$;
dann gilt: jedes Y_n ist konsistent; Y ist konsistent, denn wäre Y $\vdash \bot$, dann wäre bereits $Y_n \vdash \bot$ für ein n; Y ist maximal konsistent:
sei $A = A_m \notin Y$: zu zeigen ist, daß $Y \cup \{A_m\}$ inkonsistent ist: wäre $Y \cup \{A_m\}$ konsistent, dann auch $Y_m \cup \{A_m\}$ und daher $A_m \in Y$;
sei $A = A_m \in Y$: zu zeigen ist, daß $Y \cup \{A_m\}$ konsistent ist: wir zeigen umgekehrt, daß gilt: $Y \cup \{A_m\}$ inkonsistent, daher $A_m \notin Y$: wäre $Y \cup \{A_m\} \vdash \bot$, dann auch $Y \vdash \neg A_m$, sodaß Y inkonsistent wäre.

BEMERKUNG:
Für Y_{n+1} kann auch $Y_n \cup \{\neg A_n\}$, falls $Y_n \cup \{\neg A_n\}$ konsistent ist, gewählt werden; dann bleibt zu zeigen, daß dies wohldefiniert ist.

2.1.2 Semantik

DEFINITION (Modell, Gültigkeit im Modell):
M heißt (aussagenlogisches) Modell gdw $M \subseteq AV$
A heißt gültig im Modell M, $M \models_{AL} A$, wird induktiv definiert durch:
(i) $M \models_{AL} p$ gdw $p \in M$ für alle $p \in AV$
(ii) nicht $M \models_{AL} \perp$
(iii) $M \models_{AL} \neg A$ gdw nicht $M \models_{AL} A$
(iv) $M \models_{AL} A \wedge B$ gdw $M \models_{AL} A$ und $M \models_{AL} B$
$M \models_{AL} A \vee B$ gdw $M \models_{AL} A$ oder $M \models_{AL} B$
$M \models_{AL} A \rightarrow B$ gdw wenn $M \models_{AL} A$ dann $M \models_{AL} B$
M heißt dann auch Modell für A

BEMERKUNG:
jedes Modell M kann identifiziert werden mit einer (Belegungs-)Funktion $\varphi = \varphi_M$: $AV \rightarrow \{1, 0\}$ bzw. mit einer Funktion φ von AV in die Menge {W, F} der Wahrheitswerte durch:
$\varphi_M(p)=1$ gdw $p \in M$
φ wird dann fortgesetzt auf φ: WFF $\rightarrow \{1, 0\}$ (bzw. {W, F}) durch folgende Klauseln:
(i) $\varphi(\perp) = 0$
(ii) $\varphi(\neg A) = 1$ gdw $\varphi(A) = 0$
(iii) $\varphi(A \wedge B) = 1$ gdw $\varphi(A) = 1$ und $\varphi(B) = 1$
$\varphi(A \vee B) = 1$ gdw $\varphi(A) = 1$ oder $\varphi(B) = 1$
$\varphi(A \rightarrow B) = 1$ gdw wenn $\varphi(A) = 1$ dann $\varphi(B) = 1$
Es gilt: $M \models_{AL} A$ gdw $\varphi_M(A) = 1$
Umgekehrt kann jede (Belegungs-)Funktion φ identifiziert werden mit einem Modell M_φ. Beide Behauptungen beweist man durch Induktion nach g(A). Im folgenden werden wir öfter zwischen beiden Schreibweisen wechseln.

In obiger Definition wird die Bedeutung der aussagenlogischen Junktoren geregelt; der Begriff der Gültigkeit ist somit ein semantischer Begriff, da er Bezug nimmt auf die Bedeutung der aussagenlogischen Zeichen.
Die Semantik der Aussagenlogik ist – etwa im Gegensatz zu derjenigen der Modallogik – wahrheitsfunktional, d.h. die Wahrheit (bzw. Gültigkeit im Modell) einer komplexen Formel ist bestimmt durch die Wahrheit ihrer Teilformeln.
Dieser Sachverhalt kann in folgender Grafik veranschaulicht werden:

A	¬A
W	F
F	W

A	B	A∧B	A∨B	A→B
W	W	W	W	W
W	F	F	W	F
F	W	F	W	W
F	F	F	F	W

BEMERKUNG:
Das Falsum ⊥ kann als nullstellige konstante (Wahrheits-)Funktion mit dem Wert 0 aufgefasst werden.

Der Junktor $\neg$ kann als (Wahrheits-)Funktion von $\{1, 0\} \rightarrow \{1, 0\}$ aufgefasst werden; insgesamt gibt es vier derartige einstellige Wahrheitsfunktionen.
Die Junktoren $\wedge$, $\vee$ und $\rightarrow$ können als Funktionen $\{1, 0\} \times \{1, 0\} \rightarrow \{1, 0\}$ aufgefasst werden; insgesamt gibt es 16 derartige zweistellige Wahrheitsfunktionen.
Insgesamt gibt es $2^{2 \text{ hoch } n}$ n-stellige Wahrheitsfunktionen von $\{1, 0\}^n \rightarrow \{1, 0\}$.
Man kann nun zeigen, daß die von uns gewählten Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$ und $\rightarrow$ (und $\perp$) ausreichen, um alle n-stelligen Wahrheitsfunktionen zu beschreiben. Man sagt in diesem Falle auch, daß die Signatur $\{\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ (funktional) vollständig ist bzw. eine vollständige Funktoren- oder Junktorenbasis bildet.
Weitere Beispiele vollständiger Signaturen wären etwa $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$ oder $\{\perp, \rightarrow\}$, während hingegen z.B. $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ funktional unvollständig ist.

DEFINITION (Tautologie, Erfüllbarkeit und semantische Folgerung):
A heißt (aussagenlogisch) allgemeingültig oder Tautologie, $\models_{AL} A$, gdw $M \models_{AL} A$ für alle Modelle M gilt.
TAU sei die Menge aller Tautologien.
M heißt Modell für X, $M \models_{AL} X$, gdw $M \models_{AL} A$ für alle $A \in X$ gilt (gdw für alle $A \in X$ gilt: $\varphi(A) = 1$, oder kurz: $\varphi(X) = 1$).
X heißt dann erfüllbar (gdw es gibt ein φ mit $\varphi(X) = 1$).
A heißt semantische Folgerung aus X, $X \models_{AL} A$, gdw für alle Modelle M gilt: wenn $M \models_{AL} X$ dann $M \models_{AL} A$ (gdw für alle φ gilt: (für alle $B \in X$: $\varphi(B) = 1) \Rightarrow \varphi(A) = 1$, oder kurz: für alle φ gilt: $\varphi(X) = 1 \Rightarrow \varphi(A) = 1$).
$TH(M) =: \{A \,/\, M \models_{AL} A\}$ heißt Modellmenge für ein Modell M ($TH(M) = TH(\varphi_M) = \{A \,/\, \varphi(A) = 1\}$).

LEMMA 19:
(i) $\models_{AL} A$ (gdw $A \in$ TAU) gdw $\emptyset \models_{AL} A$
(ii) $\models_{AL}$ ist eine Konsequenzrelation
(iii) für $\models_{AL}$ gilt das Deduktionstheorem

BEWEIS:
(i) klar
(ii) zu zeigen ist:
a) $A \in X \Rightarrow X \models_{AL} A$ (Reflexivität): klar
b) $X \models_{AL} A$ und $X \subseteq Y \Rightarrow Y \models_{AL} A$ (linke Monotonie): klar
c) (für alle $A \in Y$: $X \models_{AL} A$), $Y \models_{AL} B \Rightarrow X \models_{AL} B$ (Abschlußeigenschaft): angenommen, es gibt ein φ mit $\varphi(X)=W$ und $\varphi(B)=F$; dann ist $\varphi(Y)=F$, d.h. es gibt ein $A \in Y$ mit $\varphi(A)=F$; dann gilt aber nicht $X \models_{AL} A$.
(iii) zu zeigen ist:
$X \cup \{A\} \models_{AL} B$ gdw $X \models_{AL} A \rightarrow B$: klar

BEMERKUNG:
Daß $\models_{AL}$ ein deduktives System ist, d.h. daß dafür die Endlichkeit gilt, werden wir erst mit dem starken Vollständigkeitssatz beweisen (für einen direkten Beweis siehe etwa Rautenberg (1979, 42)).
Im folgenden schreiben wir kurz $\models$ statt $\models_{AL}$.

LEMMA 20:
$M \models A \Rightarrow$ es gibt ein endliches $M_0 \subseteq M$ mit $M_0 \models A$

BEWEIS:
Es ist anschaulich klar, daß es bei der Bestimmung des Wahrheitswertes einer Formel A nur auf die Wahrheitswerte der in A enthaltenen Aussagenvariablen ankommt: sei $M_0 := Var(A) \cap M$; durch Induktion nach g(A) zeigt man: $M \models A$ gdw $M_0 \models A$; oder anders formuliert: sind φ und φ^* Belegungen mit $\varphi(p) = \varphi^*(p)$ für alle $p \in Var(A)$, dann gilt: $\varphi(A) = \varphi^*(A)$; die Induktionsvoraussetzung ist wie folgt zu formulieren: sind φ und φ^* Belegungen mit $\varphi(p) = \varphi^*(p)$ für alle $p \in \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ und alle $n \geq 1$ mit $\{p_1, p_2, ..., p_n\} \subseteq Var(A)$, so ist $\varphi(A) = \varphi^*(A)$.

FOLGERUNG (Entscheidbarkeit für die Eigenschaft, eine Tautologie zu sein)
$A \in TAU$ gdw $M \models A$ für alle M mit $M \subseteq Var(A)$.

BEISPIEL:
Ein Entscheidungsverfahren für die Eigenschaft, eine Tautologie zu sein, ist die Wahrheitstafelmethode, bei der der Wahrheitswert einer Formel sozusagen von innen nach aussen berechnet wird:

p	q	$p \rightarrow$	$(q \rightarrow p)$
W	W	W	W
W	F	W	W
F	W	W	F
F	F	W	W

LEMMA 21:
(i) $M \models TAU$, also $TAU \subseteq TH(M)$ für alle Modelle M, d.h. $TAU \subseteq \cap TH(M)$.
(ii) alle Axiome der Aussagenlogik sind Tautologien.

BEWEIS:
(i) klar
(ii) man überprüft jedes Axiom(-enschema) etwa mithilfe der Wahrheitstafelmethode auf Allgemeingültigkeit.

LEMMA 22:
Einige weitere aussagenlogische Tautologien (T1-T39 der Zusammenstellung von Czermak):

$A \vee \neg A$ (tertium non datur, Satz vom ausgeschlossenen Dritten)
$\neg(A \wedge \neg A)$ (Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch)
$A \rightarrow A$
$A \rightarrow (B \rightarrow A)$
$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$
$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$ (Importation)
$(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ (Exportation)
$A \wedge \neg A \rightarrow B$ (ex falso quodlibet)
$(A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$

$(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$ (Dreierschluss)

$(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$ (Kettenschluss)
$(A\to B)\wedge(A\to C)\to(A\to B\wedge C)$
$(A\to C)\wedge(B\to C)\to(A\vee B\to C)$
$(A\to(A\to B))\to(A\to B)$
$(A\to B)\to(A\vee C\to B\vee C)$
$(A\to B)\to(A\wedge C\to B\wedge C)$
$A\wedge(A\to B)\to B$
$((A\to B)\to A)\to A$ (Peircesche Formel)
$A\wedge(B\vee\neg B)\leftrightarrow A$
$A\vee(B\wedge\neg B)\leftrightarrow A$

$A\leftrightarrow\neg\neg A$ (Gesetz der doppelten Negation)
$A\wedge B\leftrightarrow B\wedge A$ (Kommutativität der Konjunktion)
$A\vee B\leftrightarrow B\vee A$ (Kommutativität der Disjunktion)
$A\wedge(B\wedge C)\leftrightarrow(A\wedge B)\wedge C$ (Assoziativität der Konjunktion)
$A\vee(B\vee C)\leftrightarrow(A\vee B)\vee C$ (Assoziativität der Disjunktion)
$A\leftrightarrow A\wedge A$ (Idempotenz der Konjunktion)
$A\leftrightarrow A\vee A$ (Idempotenz der Disjunktion)
$A\wedge(B\vee C)\leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ (Distributivgesetz)
$A\vee(B\wedge C)\leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ (Distributivgesetz)
$(A\to B)\leftrightarrow(\neg B\to\neg A)$ (Kontrapositionsgesetz)

$(A\to\neg B)\leftrightarrow(B\to\neg A)$ (Kontrapositionsgesetz)
$\neg(A\wedge B)\leftrightarrow\neg A\vee\neg B$ (DeMorgansches Gesetz)
$\neg(A\vee B)\leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$ (DeMorgansches Gesetz)
$\neg(A\to B)\leftrightarrow A\wedge\neg B$
$(A\to B)\leftrightarrow\neg A\vee B$
$(A\to B)\leftrightarrow\neg(A\wedge\neg B)$
$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow(B\leftrightarrow A)$
$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$
$((A\vee\neg A)\to B)\to B$

BEWEIS:
ÜBUNG

LEMMA 23 (Erfüllbarkeitslemma):
$X \models A$ gdw $X \cup\{\neg A\}$ ist unerfüllbar

BEWEIS:
$\Rightarrow$: wäre $X \cup\{\neg A\}$ erfüllbar, gäbe es ein φ mit $\varphi(X, \neg A)=1$, aber dann $\varphi(X)=1$ und $\varphi(A)=0$;
$\Leftarrow$: gilt nicht $X \models A$, dann gibt es ein φ mit $\varphi(X)=1$ und $\varphi(A)=0$; dieses φ erfüllt aber $X \cup\{\neg A\}$.

LEMMA 24:
Folgende Aussagen sind äquivalent:
a) $X \models \perp$
b) X ist unerfüllbar
c) $X \models A$, für alle $A \in$ WFF

BEWEIS:
Klar, denn diese drei Aussagen bedeuten, es gibt kein φ mit $\varphi(X)=1$.

Der semantische Endlichkeitssatz besagt, daß gilt:
$X \models A$ gdw es gibt ein endliches $X_0 \subseteq X$ und $X_0 \models A$
Wir beweisen zunächst nur eine äquivalente Formulierung.

LEMMA 25 (äquivalente Formulierung der semantischen Endlichkeit):
Die semantische Endlichkeit ist äquivalent zu:
X hat ein Modell gdw jede endliche Teilmenge von X hat ein Modell

BEWEIS:
$\Rightarrow$: jede endliche Teilmenge von X habe ein Modell; hat X kein Modell, dann ist $X \models \perp$, daher gibt es ein endliches $X_0 \subseteq X$ mit $X_0 \models \perp$, d.h. es hat ein endliches X_0 kein Modell;
$\Leftarrow$: sei $X \models A$, dann ist $X \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar, dann gibt es bereits ein endliches X_0, sodaß $X_0 \cup \{\neg A\}$unerfüllbar ist, dann gibt es ein endliches $X_0 \subseteq X$ und $X_0 \models A$.

2.1.3 Korrektheit und Vollständigkeit

Von zentraler Bedeutung in der Logik sind Beziehungen zwischen Syntax und Semantik, wie sie in den Korrektheits- und Vollständigkeitssätzen ausgedrückt werden. Je nachdem, ob man eine Logik als Formelmenge mit bestimmten (Abschluß-)Eigenschaften (enger Begriff von Logik) oder als Konsequenzrelation (weiter Begriff von Logik) auffasst, kann man einen schwachen und einen starken Begriff von Korrektheit bzw. Vollständigkeit unterscheiden.
Schwache Korrektheit bedeutet, daß jedes Theorem eine Tautologie ist; schwache Vollständigkeit bedeutet, daß jede Tautologie ein Theorem ist.
Starke Korrektheit bedeutet, daß die syntaktische Folgerung die semantische Folgerung impliziert; starke Vollständigkeit bedeutet, daß die semantische Folgerung die syntaktische Folgerung impliziert.
Wir behandeln zuerst schwache Korrektheit und Vollständigkeit.

DEFINITION (schwache Korrektheit):
$\vdash$ heißt schwach korrekt bzgl. $\models$ gdw für alle A gilt: $\vdash A \Rightarrow\ \models A$

LEMMA 26 (alternative Charakterisierung der schwachen Korrektheit):
(i) $\vdash$ schwach korrekt bzgl. $\models$ gdw PC $\subseteq$ TAU
(ii) $\vdash$ schwach korrekt bzgl. $\models$ gdw für alle X, X endlich gilt: (X erfüllbar $\Rightarrow$ X konsistent)
(iii) $\vdash$ schwach korrekt bzgl. $\models$ gdw für alle A gilt: $\{A\}$ erfüllbar $\Rightarrow$ $\{A\}$ konsistent.

BEWEIS:
(i) dies ist einfach die Definition von PC bzw. TAU; man sagt auch, daß die Aussagenlogik schwach korrekt ist.
(ii) $\Rightarrow$: sei X endlich und inkonsistent, d.h. $X \vdash \bot$; dann $\vdash \wedge X \rightarrow \bot$, dann $\models \wedge X \rightarrow \bot$, dann $\wedge X \models \bot$, dann $X \models \bot$, daher ist X unerfüllbar.
$\Leftarrow$: sei $\vdash A$; dann ist $\neg A$ inkonsistent (denn $A \rightarrow (\neg A \rightarrow \bot)$), dann $\neg A \vdash \bot$, dann $\neg A$ unerfüllbar, dann $\neg A \models \bot$, daher $\models A$.
(iii) analog zu (ii).

BEMERKUNG:
A heißt Kontradiktion gdw für alle φ: $\varphi(A) = 0$; KONTRA
A heißt kontingent gdw es gibt φ, φ^*: $\varphi(A) = 1, \varphi^*(A) = 0$; KONTI
Nun gilt:
A erfüllbar gdw A Tautologie oder A kontingent
A Tautologie gdw $\neg A$ Kontradiktion
$\neg A$ Tautologie gdw A Kontradiktion
Weiters gilt:
Jedes Theorem ist konsistent
A Theorem gdw $\neg A$ inkonsistent
$\neg A$ Theorem gdw A inkonsistent
Also gilt:
$A \in$ PC $\Leftrightarrow \neg A$ inkonsistent $\Leftrightarrow \neg A$ unerfüllbar $\Leftrightarrow \neg A$ Kontradiktion $\Leftrightarrow A \in$ TAU
A inkonsistent $\Leftrightarrow \neg A \in$ PC $\Leftrightarrow \neg A \in$ TAU $\Leftrightarrow$ A Kontradiktion $\Leftrightarrow$ A unerfüllbar

DEFINITION (schwache Vollständigkeit):
$\vdash$ heißt schwach vollständig bzgl. $\models$ gdw für alle A gilt: $\models A \Rightarrow\ \vdash A$

LEMMA 27 (alternative Charakterisierung der schwachen Vollständigkeit):
(i) $\vdash$ schwach vollständig bzgl. $\models$ gdw TAU $\subseteq$ PC
(ii) $\vdash$ schwach vollständig bzgl. $\models$ gdw für alle X, X endlich gilt: (X konsistent $\Rightarrow$ X erfüllbar)
(iii) $\vdash$ schwach vollständig bzgl. $\models$ gdw für alle A gilt: $\{A\}$ konsistent $\Rightarrow \{A\}$ erfüllbar.

BEWEIS:
(i) wie oben klar; man sagt auch, daß die Aussagenlogik schwach vollständig ist.
(ii) $\Rightarrow$: sei X endlich und unerfüllbar; dann $X \models \bot$, dann $\models \wedge X \rightarrow \bot$, dann $\vdash \wedge X \rightarrow \bot$, daher ist X inkonsistent.
$\Leftarrow$: sei $\models A$; dann $\neg A \models \bot$, dann $\neg A$ unerfüllbar, dann $\neg A$ inkonsistent, daher $\vdash A$ (denn $\vdash (\neg A \rightarrow \bot) \rightarrow A$).
(iii): analog zu (ii).

SATZ 2 (schwache Korrektheit der Aussagenlogik):
$\vdash$ ist schwach korrekt bzgl. $\models$

BEWEIS:
Wir zeigen PC $\subseteq$ TAU durch Herleitungsinduktion:
Wir haben schon gezeigt, daß alle Axiome Tautologien sind; was zu zeigen bleibt, ist, daß der Modus Ponens die Eigenschaft, Tautologie zu sein, überträgt: sind A und $A \rightarrow B$ Tautologien, dann auch B; dies ist klar, denn es gilt für alle Modelle M: $M \models A$ und $M \models A \rightarrow B \Rightarrow M \models B$.

SATZ 3 (schwache Vollständigkeit der Aussagenlogik):
$\vdash$ ist schwach vollständig bzgl. $\models$

BEWEIS:
Im nächsten Kapitel mithilfe eines Tableaukalküls.

Wenden wir uns jetzt der starken Korrektheit und Vollständigkeit zu.

DEFINITION: (starke Korrektheit):
$\vdash$ heißt stark korrekt bzgl. $\models$ gdw gilt: (für alle X, A gilt: $X \vdash A \Rightarrow X \models A$)

LEMMA 28 (alternative Charakterisierung der starken Korrektheit):
$\vdash$ stark korrekt bzgl. $\models$ gdw für alle X gilt: (X erfüllbar $\Rightarrow$ X konsistent)

BEWEIS:
$\Rightarrow$: sei X inkonsistent; dann $X \vdash \bot$, dann $X \models \bot$, daher X unerfüllbar.
$\Leftarrow$: sei $X \vdash A$; dann $X \cup \{\neg A\}$ inkonsistent, dann $X \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar, daher $X \models A$.

DEFINITION (starke Vollständigkeit):
$\vdash$ heißt stark vollständig bzgl. $\models$ gdw gilt: (für alle X, A gilt: $X \models A \Rightarrow X \vdash A$)

LEMMA 29 (alternative Charakterisierung der starken Vollständigkeit):
$\vdash$ stark vollständig bzgl. $\models$ gdw für alle X gilt: (X konsistent $\Rightarrow$ X erfüllbar)

BEWEIS:
$\Rightarrow$: sei X unerfüllbar; dann X $\models \bot$, dann X $\vdash \bot$, daher X inkonsistent.
$\Leftarrow$: X $\models$ A; dann X $\cup \{\neg A\}$ unerfüllbar, dann X $\cup \{\neg A\}$ inkonsistent, daher X $\vdash$ A.

SATZ 4 (starke Korrektheit der Aussagenlogik):
$\vdash$ ist stark korrekt bzgl. $\models$

BEWEIS:
Sei X $\vdash$ A; zu zeigen ist: X $\models$ A.
Sei M ein Modell mit M $\models$ X; zu zeigen ist: M $\models$ A.
wir zeigen durch Herleitungsinduktion nach h(A):
wenn X $\vdash$ A dann M $\models$ A für alle A $\in$ WFF.
Induktionsanfang: h(A) = 1:
wenn A $\in$ X dann gilt: M $\models$ A
Wenn A ein aussagenlogisches Axiom ist, dann gilt: M $\models$ A
Induktionsvoraussetzung: Behauptung gilt für alle A mit h(A) = n.
Induktionsschritt: sei h(A) = n+1, dann gibt es ein B mit h(B) $\leq$ n und h(B$\rightarrow$A) $\leq$ n und X $\vdash$ B und X $\vdash$ B$\rightarrow$A, aber dann gilt auch M $\models$ B und M $\models$ B$\rightarrow$A; daraus folgt M $\models$ A.
Da M beliebig war, folgt daraus X $\models$ A.

Alternativer BEWEIS:
Sei X erfüllbar; zu zeigen ist: X ist konsistent.
Sei φ mit φ(X) = 1.
Wir zeigen durch Herleitungsinduktion nach h(A):
X $\vdash$ A $\Rightarrow$ φ(A) = 1 für alle A $\in$ WFF.
Induktionsanfang: h(A)=1:
A $\in$ X $\Rightarrow$ φ(A) = 1
A $\in$ TAU $\Rightarrow$ φ(A) = 1
Induktionsschritt: (MP) erhält die Gültigkeit in φ, wie oben.
Dies beweist die Behauptung, denn wäre X inkonsistent, wäre X $\vdash \bot$, also $\varphi(\bot)$=1, ein Widerspruch.

SATZ 5 (starke Vollständigkeit der Aussagenlogik)
$\vdash$ ist stark vollständig bzgl. $\models$

BEWEIS:
Wir zeigen: X konsistent $\Rightarrow$ X erfüllbar
sei X konsistent, Y maximal konsistent mit X $\subseteq$ Y und M := AV $\cap$ Y;
wir zeigen durch Induktion nach g(A):
A $\in$ Y gdw M $\models$ A für alle A $\in$ WFF.
Induktionsanfang: g(A) = 0:
p $\in$ Y gdw p $\in$ M gdw M $\models$ p
$\bot \in$ Y gdw M $\models \bot$
Induktionsvoraussetzung: Behauptung gilt für alle A mit g(A) = n.

Induktionsschritt: $g(A) = n+1$:
$A=\neg B$: $\neg B \in Y$ gdw nicht $B \in Y$ gdw nicht $M \models B$ gdw $M \models \neg B$
$A=B\wedge C$: $B\wedge C \in Y$ gdw $B \in Y$ und $C \in Y$ gdw $M \models B$ und $M \models C$ gdw $M \models B\wedge C$
Analog für die anderen Junktoren.
Also gilt $M \models Y$ und daher auch $M \models X$, d.h. X ist erfüllbar.

Alternativer BEWEIS:
Wir zeigen: $X \models A \Rightarrow X \vdash A$;
Angenommen, nicht $X \vdash A$, dann ist $X \cup \{\neg A\}$ konsistent, daher gibt es ein maximal konsistentes Y mit $X \cup \{\neg A\} \subseteq Y$;
sei $\varphi(p) = 1$ gdw $p \in Y$, dann gilt wie oben $\varphi(B) = 1$ gdw $B \in Y$;
daraus folgt $\varphi(Y) = 1$, also $\varphi(X) = 1$ und $\varphi(A) = 0$; daher gilt nicht $X \models A$.

LEMMA 30:
X maximal konsistent gdw es gibt ein M mit X=TH(M)

BEWEIS:
$\Rightarrow$: sei X maximal konsistent und $M:= AV \cap X$; wie oben zeigt man, daß $M \models X$ gilt.
$\Leftarrow$: sei X=TH(M); zu zeigen: X ist maximal konsistent: daß X konsistent ist, ist klar; zu zeigen ist noch: $A \in X$ oder $\neg A \in X$: wenn $A \notin X$, dann nicht $M \models A$, dann aber $M \models \neg A$.

FOLGERUNGEN:
(i) Aus der starken Vollständigkeit folgt natürlich die schwache Vollständigkeit.
Aber auch umgekehrt folgt aus der schwachen Vollständigkeit, dem Deduktionstheorem für $\models$ und Lemma 9 die starke Vollständigkeit.
(ii) Aus der starken Vollständigkeit und dem Deduktionstheorem für $\models$ folgt das Deduktionstheorem für $\vdash$.
(iii) erst jetzt erhalten wir die semantische Endlichkeit, die wir in ihre beiden Formulierungen noch einmal festhalten wollen:

Semantische Endlichkeit für Modelle:
X hat ein Modell gdw jede endliche Teilmenge von X hat ein Modell

Semantische Endlichkeit für das Folgern:
$X \models A \Rightarrow$ es gibt ein endliches X_0 mit $X_0 \subseteq X$ und $X_0 \models A$

BEWEIS:
a) hat X kein Modell, ist X inkonsistent, also $X \vdash \bot$, also bereits $X_0 \vdash \bot$ für ein endliches X_0, dieses X_0 hat daher auch kein Modell.
b) $X \models A \Rightarrow X \vdash A \Rightarrow$ es gibt ein endliches X_0 mit $X_0 \subseteq X$ und $X_0 \vdash A \Rightarrow$ es gibt ein endliches X_0 mit $X_0 \subseteq X$ und $X_0 \models A$.

2.2 Klassische Modallogik

Für diesen Abschnitt wird eine gewisse Grundkenntnis der Modallogik vorausgesetzt.
Im folgenden sei L eine normale modale Aussagenlogik in der Sprache $\{\bot, \neg, \wedge, \Box\}$.

DEFINITION (modallogische Schlußregel):
Nezessierung (NE): $\{\langle A, \Box A\rangle \,/\, A \in \text{WFF}\}$

DEFINITION (einige modallogische Formelschemata):

K $\Box(A\to B)\to(\Box A\to\Box B)$
T $\Box A\to A$
4 $\Box A\to\Box\Box A$
G $\Box(\Box A\to A)\to\Box A$

DEFINITION (normale Modallogik):
L heißt Modallogik gdw $\text{TAU}\subseteq L$ und L abgeschlossen gegenüber (MP) ist.
Eine Modallogik L heißt normal gdw $K\in L$ und L abgeschlossen gegenüber (NE) ist.
K sei die kleinste normale Modallogik.
$\mathbf{KA_1...A_n}$ sei die kleinste Logik, die die Formelschemata A_1, ..., A_n enthält; läßt sich eine Logik in dieser Form darstellen, heißt L endlich axiomatisierbar und A_1, ..., A_n heißen Axiome von L; wir schreiben auch $\vdash_L A$ für $A \in L$.

Wir betrachten folgende Logiken: **K**, **K4**, **T** (= KT), **S4** (= K4T) und **G** (= KG).

DEFINITION (L-ableitbar, L-inkonsistent, maximal L-konsistent):
A heißt L-ableitbar aus X, $X \vdash_L A$, gdw es $B_1, ..., B_n \in X$ gibt mit $\vdash_L B_1\wedge...\wedge B_n\to A$.
X heißt L-inkonsistent gdw $X \vdash_L \bot$, sonst L-konsistent;
X heißt maximal L-konsistent (L-maximal) gdw X L-konsistent ist und für alle A gilt: $A \in X$ oder $\neg A \in X$.

DEFINITION (Kripke-Struktur):
Eine (Kripke-)Struktur ist ein geordnetes Paar $F = \langle W, R\rangle$, wobei gilt:
$W \neq \emptyset$ und $R \subseteq W\times W$;
ein (auf der Struktur $F = \langle W, R\rangle$ basierendes) (Kripke-)Modell ist ein geordnetes Tripel $M = \langle W, R, V\rangle$, wobei gilt: $V\colon AV\to\wp(W)$.

DEFINITION (Gültigkeit in einer Welt w des Modells M):
Die Relation $M \models A[w]$, die Formel A ist gültig in der Welt w des Modells $M = \langle W, R, V\rangle$, wird induktiv definiert durch:
$M \models p[w]$ gdw $w \in V(p)$ (für alle $p \in AV$)
Nicht $M \models \bot[w]$
$M \models \neg A[w]$ gdw nicht $M \models A[w]$
$M \models (A\wedge B)[w]$ gdw $M \models A[w]$ und $M \models B[w]$
$M \models \Box A[w]$ gdw für alle $w'\in W$: ($wRw' \Rightarrow M \models A[w']$)

DEFINITION (Gültigkeit in einem Modell, in einer Struktur, ...):
A heißt gültig im Modell M, $M \models A$, gdw für alle $w \in W$: $M \models A[w]$
A heißt gültig in der Struktur F, $F \models A$, gdw A in jedem Modell M gültig ist, das auf F basiert
A heißt gültig in einer Menge $\mathcal{F}$ von Strukturen, oder $\mathcal{F}$-allgemeingültig, $\mathcal{F} \models A$ oder $\models_{\mathcal{F}} A$, gdw für alle $F \in \mathcal{F}$: $F \models A$
X heißt gültig in einer Welt w des Modells M, $M \models X[w]$, gdw für alle $A \in X$: $M \models A[w]$; X heißt dann auch erfüllbar im Modell M
X heißt erfüllbar in einer Struktur F gdw X in einem Modell M erfüllbar ist, das auf F basiert
X heißt erfüllbar in einer Menge $\mathcal{F}$ von Strukturen, $\mathcal{F}$-erfüllbar, gdw X in einem $F \in \mathcal{F}$ erfüllbar ist

DEFINITION (Korrektheit und Vollständigkeit bzgl. einer Menge von Strukturen):
Sei $\mathcal{F}$ eine Menge von Strukturen;
L heißt korrekt bzgl. $\mathcal{F}$ gdw für alle X, X endlich gilt: (X $\mathcal{F}$-erfüllbar $\Rightarrow$ X L-konsistent);
L heißt vollständig bzgl. $\mathcal{F}$ gdw für alle X, X endlich gilt: (X L-konsistent $\Rightarrow$ X $\mathcal{F}$-erfüllbar);
L wird durch $\mathcal{F}$ charakterisiert gdw L korrekt und vollständig bzgl. $\mathcal{F}$ ist.

DEFINITION (Cluster):
In einer transitiven Struktur $F = \langle W, R \rangle$ definieren wir folgende Äquivalenzrelation $\sim$ zwischen Welten durch: $w \sim w'$ gdw $w = w'$ oder (wRw‘ und w’Rw);
der R-Cluster C_w von w ist die Menge $\{w' / w \sim w'\}$;
$C_w \preceq C_{w'}$ gdw wRw‘ definiert eine transitive und antisymmetrische Relation $\preceq$ zwischen Clustern;
$C_w \prec C_{w'}$ gdw $C_w \preceq C_{w'}$ und $C_w \neq C_{w'}$ (gdw wRw‘ und nicht w’Rw) definiert eine transitive und irreflexive Relation $\prec$ zwischen Clustern;
ein Cluster heißt degeneriert gdw wenn er aus einem einzigen irreflexiven Punkt besteht; er heißt simpel gdw er aus einem einzigen reflexiven Punkt besteht und echt gdw er aus mindestens zwei verschiedenen Punkten besteht (die Relation R zwischen Punkten in einem solchen Cluster ist dann eine Äquivalenzrelation); ein simpler oder echter Cluster heißt nichtdegeneriert.

Im folgenden verstehen wir unter einem Baum einen endlichen Wurzelbaum von Clustern von Welten (wobei jeder Cluster selbst endlich ist) geordnet durch $\prec$.

SATZ 6 (Charakterisierungssatz):
Jede Logik L wird durch die Menge der folgenden L-Strukturen charakterisiert:

L	L-Struktur
K	endlicher, irreflexiver, intransitiver Baum von Welten
T (= KT)	endlicher, reflexiver, intransitiver Baum von Welten
K4	endlicher, (transitiver) Baum von Clustern
S4 (=K4T)	endlicher, (transitiver) Baum von nichtdegenerierten Clustern
G (= K4G)	endlicher (transitiver, irreflexiver) Baum von degenerierten Clustern

BEWEIS:
Für **K** siehe Rautenberg (1979, 210), für **T** siehe Rautenberg (1983, 410f), für **K4** siehe Segerberg (1971, 77), für **S4** siehe Segerberg (1971, 77), für **G** siehe Segerberg (1971, 88).

Übungen zu Kapitel 2:

1 Machen Sie sich die verschiedenen syntaktischen Definitionen anhand von (selbst gewählten) Beispielen vertraut.

2 Was ist der Unterschied zwischen Schlußregel und Konsequenzrelation?

3 Beweisen Sie Lemma 9.

4 Beweisen Sie Lemma 11.

5 Beweisen Sie Lemma 14, Teil (v).

6 Zeigen Sie, daß die beiden Arten der Formulierung semantischer Begriffe (mit Modellen als Mengen und Modellen als Funktionen, sowie weitere Begriffe) äquivalent sind.

7 Beweisen Sie (Teile von) Lemma 22.

8 Was ist der Unterschied zwischen Syntax und Semantik? Von welchen Lemmata bzw. von welchen Sätzen gibt es parallele syntaktische bzw. semantische Formulierungen?