3 Tableaukalküle

3.1 Klassische Aussagenlogik

3.1.1 Die Variante T1 und ein Entscheidungsverfahren für die Aussagenlogik

Ein zweites Entscheidungsverfahren für die Aussagenlogik ist der Tableaukalkül. Sei A eine beliebige Formel; wir nehmen an, daß A keine Tautologie ist, d.h. daß es ein φ gibt mit $\varphi(A) = 0$. Wir ziehen eine senkrechten Strich, schreiben rechts vom Strich diejenigen Formeln an, die den Wahrheitswert 0 erhalten, links vom Strich diejenigen Formeln, die den Wahrheitswert 1 erhalten.
Startpunkt ist also: $\mid A$.
Die Regeln des Tableaukalküls T1 für die Aussagenlogik sind die folgenden:

$$\begin{array}{l|l} \neg A, X & Y \\ X & Y, A \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l|l} X & Y, \neg A \\ A, X & Y \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} A\wedge B, X & Y \\ A, B, X & Y \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} X \mid Y, A\wedge B \\ X \mid Y, A \qquad X \mid Y, B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A\vee B, X \mid Y \\ A, X \mid Y \qquad B, X \mid Y \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l|l} X & Y, A\vee B \\ X & Y, A, B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A\rightarrow B, X \mid Y \\ X \mid Y, A \qquad B, X \mid Y \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l|l} X & Y, A\rightarrow B \\ A, X & Y, B \end{array}$$

DEFINITION (geschlossenes Tableau):
Wenn an jedem Strich eines Tableaus für A eine Aussagenvariable (oder eine beliebige Formel) sowohl links als auch rechts vom Strich steht, oder $\perp$ links vom Strich steht, nennt man dieses Tableau geschlossen.

BEISPIEL:
Sei A die Formel $(p\wedge q)\rightarrow p$; ein Tableau für A sieht so aus:

$$\begin{array}{l|l} & (p\wedge q)\rightarrow p \\ p\wedge q & p \\ p, q & p \end{array}$$

dieses Tableau für A ist also geschlossen.

Die Tableauregeln basieren auf folgender BEOBACHTUNG 1:
$\neg A$ wahr (im Modell φ) gdw A falsch (im Modell φ)
$\neg A$ falsch gdw A wahr
$A\wedge B$ wahr gdw A wahr und B wahr
$A\wedge B$ falsch gdw A falsch oder B falsch
$A\vee B$ wahr gdw A wahr oder B wahr
$A\vee B$ falsch gdw A falsch und B falsch

$A \to B$ wahr gdw A falsch oder B wahr
$A \to B$ falsch gdw A wahr und B falsch

Die Tableauregeln bauen die (Komplexität der) Formeln schrittweise ab; dieses Verfahren terminiert nach einer endlichen Zeit (d.h. es ist keine weitere Anwendung der Regeln möglich).

LEMMA 1:
Es gibt ein geschlossenes Tableau für A $\Rightarrow$ A ist eine Tautologie.

BEWEIS:
Aus der Annahme, daß A keine Tautologie ist (es gibt ein Modell φ mit $\varphi(A)=0$), und Beobachtung 1, haben wir mithilfe des Tableaukalküls einen Widerspruch konstruiert: denn ein geschlossenes Tableau besagt, daß (bei Berücksichtigung aller Möglichkeiten) für dieses Modell φ gilt: $\varphi(p)=1$ und $\varphi(p)=0$ für eine Aussagenvariable p.

Wenn es ein geschlossenes Tableau für A gibt, heißt A auch T-beweisbar. Obiges Lemma drückt dann die Korrektheit des Tableaukalküls aus: wenn A T-beweisbar ist, ist A eine Tautologie.
Es gilt auch die Umkehrung dieser Tatsache: wenn A eine Tautologie ist, dann ist A T-beweisbar; wir zeigen die Kontraposition: wenn A nicht T-beweisbar ist, ist A keine Tautologie; dies ist die Vollständigkeit des Tableaukalküls.

LEMMA 2:
Es gibt kein geschlossenes Tableau für A $\Rightarrow$ ein (beliebiger offener) Ast eines (beliebigen) nichtgeschlossenen Tableaus $p_1, \ldots p_n \mid q_1, \ldots, q_m$ liefert ein Modell φ, in dem A nicht gültig ist (also $\varphi(A)=0$), in dem man $\varphi(p_1) = \ldots = \varphi(p_n) = 1$ und $\varphi(q_1) = \ldots = \varphi(q_m) = 0$ setzt.

BEWEIS:
Dies ergibt sich aus der Beschaffenheit der Regeln und Beobachtung 1.

BEISPIEL:
Sei A die Formel $\neg(p\wedge q)\to p$; ein Tableau für A sieht so aus:

$$
\begin{array}{lll}
 & \mid \neg(p\wedge q)\to p & \\
\neg(p\wedge q) & \mid p & \\
 & \mid p\wedge q & \\
\mid p & & \mid q
\end{array}
$$

Diese Tableau ist nicht geschlossen, beide Äste sind offen; der linke Ast liefert das Modell $\varphi(p)=0$; wie man leicht sieht, ist in diesem Modell $\varphi(\neg(p\wedge q)\to p)=0$.

Der Tableaukalkül ist also ein Entscheidungsverfahren für die Aussagenlogik. Im nächsten Kapitel werden wir eine Variante dieses Tableaukalküls dazu benützen, die schwache Vollständigkeit der Aussagenlogik zu zeigen.

3.1.2 Die Variante T2 und ein Beweis der schwachen Vollständigkeit

Wir formulieren einen zweiten Tableaukalkül für die Aussagenlogik und nehmen wiederum an, daß A keine Tautologie ist, d.h. daß es ein φ gibt mit $\varphi(A) = 0$, oder $\varphi(\neg A) = 1$. Diesmal versuchen wir, die Annahme, daß $\neg A$ erfüllbar ist, auf einen Widerspruch zu führen, indem wir von $\{\neg A\}$ ausgehen und einen Baum konstruieren, dessen Knoten aus weiteren Mengen bestehen.
Jede der folgenden Tableauregeln besteht aus einem sog. Numerator (einer endlichen Formelmenge) über einem waagrechten Strich und einem oder zwei sog. Denominatoren (ebenfalls endliche Formelmengen) unter diesem Strich, wobei die Denominatoren durch senkrechte Striche getrennt werden. Eine Tableauregel kann gelesen werden als: ist der Numerator dieser Regel konsistent (bzw. erfüllbar), dann auch mindestens einer der Denominatoren.
Der Tableaukalkül T2 für die Aussagenlogik besteht aus den folgenden Regeln (wir schreiben X, A für $X \cup \{A\}$ etc.):

$(\neg)$ $\dfrac{X, \neg\neg A}{X, A}$

$(\wedge)$ $\dfrac{X, A\wedge B}{X, A, B}$ $(\neg\wedge)$ $\dfrac{X, \neg(A\wedge B)}{X, \neg A \mid X, \neg B}$

$(\vee)$ $\dfrac{X, A\vee B}{X, A \mid X, B}$ $(\neg\vee)$ $\dfrac{X, \neg(A\vee B)}{X, \neg A, \neg B}$

$(\rightarrow)$ $\dfrac{X, A\rightarrow B}{X, \neg A \mid X, B}$ $(\neg\rightarrow)$ $\dfrac{X, \neg(A\rightarrow B)}{X, A, \neg B}$

Ein endlicher Wurzelbaum t, dessen Knoten alle endliche Formelmengen sind, heißt Tableau für eine endliche Formelmenge X gdw gilt:
(a) X ist die Wurzel von t
(b) Die Knoten von t werden ausschließlich gemäß den Tableauregeln konstruiert
(c) Ein Knoten von t ist ein Endknoten von t, wenn er eine Formel zugleich mit ihrer Negation enthält oder wenn er $\perp$ enthält

DEFINITION:
Ein Tableau t für X heißt geschlossen gdw alle Endknoten von t eine Formel zugleich mit ihrer Negation enthalten oder $\perp$ enthalten.
X heißt T-inkonsistent gdw es ein geschlossenes Tableau für X gibt, sonst T-konsistent.

Diese Tableauregeln basieren auf folgender BEOBACHTUNG 2:
$X, \neg\neg A$ erfüllbar (im Modell φ) gdw X, A erfüllbar (im Modell φ)
$X, A\wedge B$ erfüllbar gdw X, A und X, B erfüllbar
$X, \neg(A\wedge B)$ erfüllbar gdw $X, \neg A$ erfüllbar oder $X, \neg B$ erfüllbar
$X, A\vee B$ erfüllbar gdw X, A erfüllbar oder X, B erfüllbar
$X, \neg(A\vee B)$ erfüllbar gdw $X, \neg A, \neg B$ erfüllbar
$X, A\rightarrow B$ erfüllbar gdw $X, \neg A$ erfüllbar oder X, B erfüllbar

X, ¬(A→B) erfüllbar gdw X, A, ¬B erfüllbar
Zusätzlich gilt noch:
A, ¬A erfüllbar gdw ⊥ erfüllbar
X, Y erfüllbar ⇒ X erfüllbar

LEMMA 3:
Beide Varianten des Tableaukalküls sind äquivalent, d.h. für alle A gilt:
A ist T-beweisbar (in T1) gdw {¬A} ist T-inkonsistent (in T2)

BEWEIS:
Man betrachtet die erste Variante T1 des Tableaukalküls und bringt alle Formeln auf die linke Seite des Striches (diejenige Seite, auf der die wahren Formeln stehen); dann transformieren sich die 8 ursprünglichen Regeln in die 7 neuen Regeln (die erste Regel wird überflüssig).
Umkehrung: ÜBUNG.

BEISPIEL:
Sei A die Formel p→(p∨q); ein Tableau für A sieht so aus:

¬(p→(p∨q))
p, ¬(p∨q)
p, ¬p, ¬q
p, ¬p

Sei A die Formel ⊥→B:

¬(⊥→B)
⊥, ¬B

Sei A die Formel ((B→⊥)→⊥)→B:

¬(((B→⊥)→⊥)→B)
(B→⊥)→⊥, ¬B
¬(B→⊥), ¬B | ⊥, ¬B
B, ¬⊥, ¬B |

BEISPIEL:
Um etwa zu zeigen, daß (A→B)→(A→C) aus A→(B→C) folgt, betrachtet man Tableaus für die Menge {(A→(B→C)), ¬((A→B)→(A→C))}.

DEFINITION (Korrektheit und Vollständigkeit von T2):
T2 heißt korrekt bzgl. AL gdw für alle X, X endlich gilt: (X konsistent ⇒ X T-konsistent)
T2 heißt vollständig bzgl. AL gdw für alle X, X endlich gilt: (X T-konsistent ⇒ X konsistent)
T2 heißt adäquat bzgl. AL gdw TL korrekt und vollständig bzgl. AL ist.

LEMMA 4:
(i) T2 ist korrekt bzgl. AL gdw für alle A gilt: A ist T-beweisbar ⇒ A ∈ PC
(ii) T2 ist vollständig bzgl. AL gdw für alle A gilt: A ∈ PC ⇒ A ist T-beweisbar

BEWEIS:
(i) ⇒: A T-beweisbar ⇒ ¬A T-inkonsistent ⇒ ¬A inkonsistent ⇒ A ∈ PC

$\Leftarrow$: X T-inkonsistent $\Rightarrow \neg\neg\wedge X$ T-inkonsistent $\Rightarrow \neg\wedge X$ T-beweisbar $\Rightarrow \neg\wedge X \in$ PC $\Rightarrow$ X inkonsistent
(ii) $\Rightarrow$: A $\in$ PC $\Rightarrow \neg$A inkonsistent $\Rightarrow \neg$A T-inkonsistent $\Rightarrow$ A T-beweisbar
$\Leftarrow$: X inkonsistent $\Rightarrow \neg\wedge X \in$ PC $\Rightarrow \neg\wedge X$ T-beweisbar $\Rightarrow \neg\neg\wedge X$ T-inkonsistent $\Rightarrow$ X T-inkonsistent

DEFINITION (alternative Definition der Adäquatheit von T2):
T2 heißt korrekt bzgl. AL gdw für alle X, X endlich gilt: (X erfüllbar $\Rightarrow$ X T-konsistent)
T2 heißt vollständig bzgl. AL gdw für alle X, X endlich gilt: (X T-konsistent $\Rightarrow$ X erfüllbar)
T2 heißt adäquat bzgl. AL gdw TL korrekt und vollständig bzgl. AL ist.

LEMMA 5:
(i) T2 ist korrekt bzgl. AL gdw für alle A gilt: A ist T-beweisbar $\Rightarrow$ A ist Tautologie
(ii) T2 vollständig bzgl. AL gdw für alle A gilt: A ist Tautologie $\Rightarrow$ A ist T-beweisbar

BEWEIS:
(i) $\Rightarrow$: A T-beweisbar $\Rightarrow \neg$A T-inkonsistent $\Rightarrow \neg$A unerfüllbar $\Rightarrow$ A Tautologie
$\Leftarrow$: X T-inkonsistent $\Rightarrow \neg\neg\wedge X$ T-inkonsistent $\Rightarrow \neg\wedge X$ T-beweisbar $\Rightarrow \neg\wedge X$ Tautologie $\Rightarrow$ X unerfüllbar
(ii) $\Rightarrow$: A Tautologie $\Rightarrow \neg$A unerfüllbar $\Rightarrow \neg$A T-inkonsistent $\Rightarrow$ A T-beweisbar
$\Leftarrow$: X unerfüllbar $\Rightarrow \neg\wedge X$ Tautologie $\Rightarrow \neg\wedge X$ T-beweisbar $\Rightarrow \neg\neg\wedge X$ T-inkonsistent $\Rightarrow$ X T-inkonsistent

Unter Zugrundelegen der ersten Definition der Adäquatheit haben wir folgendes Bild:

$\Rightarrow$: AL korrekt
X erfüllbar $\Leftarrow$: AL vollständig **X konsistent**

T2 vollständig bzgl. AL: $\Uparrow$ $\Downarrow$: T2 korrekt bzgl. AL

X T-konsistent

bzw.:

$\Rightarrow$: AL korrekt
$\vdash$ A $\Leftarrow$: AL vollständig **$\models$ A**

T2 korrekt bzgl. AL: $\Uparrow$ $\Downarrow$: T2 vollständig bzgl. AL

A T-beweisbar

Unter Zugrundelegen der zweiten Definition der Adäquatheit haben wir folgendes Bild:

$\Rightarrow$: AL korrekt
X erfüllbar $\Leftarrow$: AL vollständig **X konsistent**

T2 vollständig bzgl. AL: $\Uparrow$ $\Downarrow$: T2 korrekt bzgl. AL

X T-konsistent

bzw.:

	$\Rightarrow$: AL korrekt	
$\vdash$ **A**	$\Leftarrow$: AL vollständig	$\models$ **A**

T2 korrekt bzgl. AL: $\Uparrow$ $\Downarrow$: T2 vollständig bzgl. AL

A T-beweisbar

LEMMA 6:
Für alle X, X endlich gilt: X konsistent $\Rightarrow$ X T-konsistent (d.h. T2 ist korrekt bzgl. AL)

BEWEIS:
Wir zeigen durch Induktion: ist der Numerator einer Tableauregel konsistent, dann auch einer der Denominatoren (d.h. ein konsistentes X kann kein geschlossenes Tableau haben), oder umgekehrt: sind alle Denominatoren inkonsistent, dann auch der Numerator.
Zu zeigen ist also, in einer ÜBUNG:
$X, A \vdash \bot \Rightarrow X, \neg\neg A \vdash \bot$
$X, A, B \vdash \bot \Rightarrow X, A \wedge B \vdash \bot$
$X, \neg A \vdash \bot$ und $X, \neg B \vdash \bot \Rightarrow X, \neg(A \wedge B) \vdash \bot$
...
$X, A, \neg B \vdash \bot \Rightarrow X, \neg(A \rightarrow B) \vdash \bot$
Zusätzlich gilt:
$\bot \vdash \bot \Rightarrow A, \neg A \vdash \bot$
$X \vdash \bot \Rightarrow X, Y \vdash \bot$

LEMMA 7:
Für alle X, X endlich gilt: X erfüllbar $\Rightarrow$ X T-konsistent

BEWEIS:
Wir zeigen durch Induktion: ist der Numerator einer Tableauregel erfüllbar, dann auch einer der Denominatoren (d.h. ein erfüllbares X kann kein geschlossenes Tableau haben), oder umgekehrt: sind alle Denominatoren unerfüllbar, dann auch der Numerator (Beobachtung 2).
Zu zeigen ist also, in einer ÜBUNG:
X, A unerfüllbar $\Rightarrow$ X, $\neg\neg$A unerfüllbar
X, A, B unerfüllbar $\Rightarrow$ X, $A \wedge B$ unerfüllbar
X, $\neg$A unerfüllbar und X, $\neg$B unerfüllbar $\Rightarrow$ X, $A \wedge B$ unerfüllbar
...
X, A, $\neg$B unerfüllbar $\Rightarrow$ X, $\neg(A \rightarrow B)$ unerfüllbar
zusätzlich gilt:
$\bot$ unerfüllbar gdw A, $\neg$A unerfüllbar
X unerfüllbar $\Rightarrow$ X, Y unerfüllbar

LEMMA 8:
Für alle X, X endlich gilt: X T-konsistent $\Rightarrow$ X erfüllbar.

BEWEIS:
Wenn X T-konsistent ist, dann gibt es ein nichtgeschlossenes Tableau für X mit einem nichtgeschlossenen Endknoten Y, der stets aus Aussagenvariablen oder deren Negation besteht (da eine Wiederholung eines Knotens auf dem Weg von der Wurzel weg wegen der Beschaffenheit der Regeln, die die Komplexität der Formeln schrittweise reduzieren, nicht möglich ist).
$M = \{p \in AV / \ p \in Y\}$ ist dann ein Modell für Y; verfolgen wir den Weg von Y zur Wurzel zurück, erhalten wir ein Modell für X, da für jede Regel gilt: ist einer der Denominatoren erfüllbar, dann auch der Numerator (Beobachtung 2).

Man kann nun zwei Strategien bzw. Ziele verfolgen:
I: Zeige, daß die Aussagenlogik vollständig ist, unter der Voraussetzung, daß AL korrekt ist.
II: Zeige, daß T2 adäquat ist, unter der Voraussetzung, daß AL korrekt und vollständig ist.

STRATEGIE I: LEMMA 6 + LEMMA 8

X erfüllbar $\Rightarrow$: AL korrekt X konsistent

LEMMA 8 $\Downarrow$: LEMMA 6

X T-konsistent

STRATEGIE II: LEMMA 7 + LEMMA 8

$\Rightarrow$: AL korrekt
X erfüllbar $\Leftarrow$: AL vollständig X konsistent

LEMMA 8 $\Uparrow$ $\Downarrow$: LEMMA 7

X T-konsistent

FOLGERUNG I:
Die Aussagenlogik ist schwach vollständig

FOLGERUNG II:
Der Tableaukalkül T2 ist adäquat für die Aussagenlogik.

Variante T1:

Startpunkt: | A bzw. X | A.

Regeln:

¬A, X | Y	X | Y, ¬A
X | Y, A	A, X | Y
A∧B, X | Y	X | Y, A∧B
A, B, X | Y	X | Y, A X | Y, B
A∨B, X | Y	X | Y, A∨B
A, X | Y B, X | Y	X | Y, A, B
A→B, X | Y	X | Y, A→B
X | Y, A B, X | Y	A, X | Y, B

Wenn an jedem Strich eines Tableaus für A eine Aussagenvariable (oder eine beliebige Formel) sowohl links als auch rechts vom Strich steht, oder ⊥ links vom Strich steht, nennt man dieses Tableau geschlossen.

Variante T2:

Startpunkt: $\{\neg A\}$, bzw. $\{X, \neg A\}$ oder allgemein gleich $\{X\}$.

Regeln:

$(\neg)$ $\dfrac{X, \neg\neg A}{X, A}$

$(\wedge)$ $\dfrac{X, A\wedge B}{X, A, B}$ $(\neg\wedge)$ $\dfrac{X, \neg(A\wedge B)}{X, \neg A \mid X, \neg B}$

$(\vee)$ $\dfrac{X, A\vee B}{X, A \mid X, B}$ $(\neg\vee)$ $\dfrac{X, \neg(A\vee B)}{X, \neg A, \neg B}$

$(\rightarrow)$ $\dfrac{X, A\rightarrow B}{X, \neg A \mid X, B}$ $(\neg\rightarrow)$ $\dfrac{X, \neg(A\rightarrow B)}{X, A, \neg B}$

Ein Tableau t für X heißt geschlossen gdw alle Endknoten von t eine Formel zugleich mit ihrer Negation enthalten oder $\perp$ enthalten.
X heißt T-inkonsistent gdw es ein geschlossenes Tableau für X gibt, sonst T-konsistent.

Zum Abschluß betrachten wir noch die Variante T3:

Startpunkt: $\{\neg A\}$, bzw. $\{X, \neg A\}$ oder allgemein gleich $\{X\}$.

Regeln:

$(\perp)$ $\dfrac{A, \neg A}{\perp}$

$(\neg)$ $\dfrac{X, \neg\neg A}{X, A}$

$(\wedge)$ $\dfrac{X, A \wedge B}{X, A, B}$

$(\neg\wedge)$ $\dfrac{X, \neg(A \wedge B)}{X, \neg A \mid X, \neg B}$

$(\vee)$ $\dfrac{X, A \vee B}{X, A \mid X, B}$

$(\neg\vee)$ $\dfrac{X, \neg(A \vee B)}{X, \neg A, \neg B}$

$(\rightarrow)$ $\dfrac{X, A \rightarrow B}{X, \neg A \mid X, B}$

$(\neg\rightarrow)$ $\dfrac{X, \neg(A \rightarrow B)}{X, A, \neg B}$

(A) $\dfrac{X, Y}{X}$ $(Y \neq \emptyset)$

Ein Tableau t für X heißt geschlossen gdw alle Endknoten von t gleich $\perp$ sind.
X heißt T-inkonsistent gdw es ein geschlossenes Tableau für X gibt, sonst T-konsistent.

3.2 Modale Tableaukalküle

DEFINITION (Tableaukalkül):
Ein Tableaukalkül TL für eine bestimmte (Modal-)Logik L besteht wiederum aus einer Menge von Tableauregeln; eine Tableauregel kann gelesen werden als: ist der Numerator dieser Regel L-konsistent (bzw. $\mathcal{F}$-erfüllbar), dann auch mindestens einer der Denominatoren.

Die aussagenlogische Basis in der Signatur $\{\bot, \neg, \rightarrow\}$ bilden folgende Regeln:

$(\bot)\quad \dfrac{A, \neg A}{\bot} \qquad\qquad (\neg)\quad \dfrac{X, \neg\neg A}{X, A}$

$(\wedge)\quad \dfrac{X, A\wedge B}{X, A, B} \qquad\qquad (\neg\wedge)\quad \dfrac{X, \neg(A\wedge B)}{X, \neg A \mid X, \neg B}$

$(A)\quad \dfrac{X, Y}{X} \qquad (Y \neq \emptyset)$

TAL sei der Kalkül $\{(\bot), (\neg), (\wedge), (\neg\wedge), (A)\}$.

Sei TL ein Tableaukalkül und X eine endliche Formelmenge; ein endlicher Wurzelbaum t, dessen Knoten endliche Formelmengen sind, heißt TL-Tableau für X gdw gilt:
(i) X ist die Wurzel von t
(ii) Die Knoten von t werden ausschließlich gemäß den Tableauregeln konstruiert
(iii) $\bot$ ist ein Endknoten von t
(iv) ist Y ein Knoten von t, der auf dem Weg von der Wurzel zu Y bereits vorgekommen ist, dann ist Y ein Endknoten von t

DEFINITION:
Ein TL-Tableau t für X heißt geschlossen gdw jeder Endknoten gleich $\bot$ ist; X heißt TL-inkonsistent gdw es ein geschlossenes TL-Tableau für X gibt, sonst TL-konsistent.

DEFINITION:
TL heißt korrekt bzgl. L gdw für alle X, X endlich gilt: (X L-konsistent $\Rightarrow$ X TL-konsistent)
TL heißt vollständig bzgl. L gdw für alle X, X endlich gilt: (X TL-konsistent $\Rightarrow$ X L-konsistent)
TL heißt adäquat bzgl. L gdw TL korrekt und vollständig bzgl. L ist.

DEFINITION:
Eine Tableauregel heißt beweisbar in TL gdw gilt: ist der Numerator TL-konsistent, dann mindestens einer der Denominatoren.

BEMERKUNG:
Der Schnittregel (CUT) im Sequenzenkalkül entspricht folgende Regel im Tableaukalkül:

(CUT*) $$\frac{X, Y}{X, A \mid Y, \neg A}$$

LEMMA 9:
TL adäquat $\Rightarrow$ (CUT*) beweisbar in TL

BEWEIS:
X, A und Y, $\neg$A beide TL-inkonsistent $\Rightarrow$ X, A $\vdash_L \bot$ und Y, $\neg$A $\vdash_L \bot \Rightarrow$ X, Y $\vdash_L \bot \Rightarrow$ X, Y TL-inkonsistent

Man kann nun wieder zwei Strategien bzw. Ziele verfolgen:
I: Zeige, daß L vollständig bzgl. $\mathcal{F}$ ist, unter der Voraussetzung, daß L korrekt bzgl. $\mathcal{F}$ ist.
II: Zeige, daß TL adäquat ist, unter der Voraussetzung, daß L korrekt und vollständig ist.

STRATEGIE I: LEMMA (a) + LEMMA (*)

X $\mathcal{F}$-erfüllbar $\Rightarrow$: L korrekt X L-konsistent

LEMMA (*) $\Downarrow$: LEMMA (a)

X TL-konsistent

Voraussetzungen:
L korrekt bzgl. $\mathcal{F}$
(a) TL korrekt bzgl. L
(*) für alle X, X endlich gilt: X TL-konsistent $\Rightarrow$ X $\mathcal{F}$-erfüllbar
Behauptung:
(i) L vollständig bzgl. $\mathcal{F}$
(ii) TL vollständig bzgl. L

BEMERKUNG:
Strategie für (a): syntaktisch
(CUT*) beweisbar in TL
falls jedes F $\in \mathcal{F}$ ein endliches W hat, dann hat L die fmp. und ist somit entscheidbar

STRATEGIE II: LEMMA (b) + LEMMA (*)

$\Rightarrow$: L korrekt
X $\mathcal{F}$-erfüllbar $\Leftarrow$: L vollständig X L-konsistent

LEMMA (*) $\Uparrow$ $\Downarrow$: LEMMA (b)

X TL-konsistent

Voraussetzungen:
L korrekt und vollständig bzgl. $\mathcal{F}$

(b) für alle X, X endlich gilt: X $\mathcal{F}$-erfüllbar $\Rightarrow$ X TL-konsistent
(*) für alle X, X endlich gilt: X TL-konsistent $\Rightarrow$ X $\mathcal{F}$-erfüllbar
Behauptung:
TL adäquat bzgl. L

BEMERKUNG:
Strategie für (b): semantisch
(CUT*) beweisbar in TL
falls jedes F $\in$ $\mathcal{F}$ ein endliches W hat, dann hat L die fmp. und ist somit entscheidbar

TK, der Tableaukalkül für **K**, sei TAL $\cup$ {(K)}, wobei gilt:

(K) $\dfrac{\Box X, \neg\Box A}{X, \neg A}$

BEISPIEL:
Ein geschlossenes Tableau für $\neg(\Box(A\to B)\to(\Box A\to\Box B))$, bzw. $(C\to D = \neg(C\wedge\neg D))$:
$\neg\neg(\Box(A\to B)\wedge\neg(\Box A\to\Box B))$:

$\neg\neg(\Box(A\to B)\wedge\neg\neg(\Box A\wedge\neg\Box B))$
$\Box(A\to B)\wedge\neg\neg(\Box A\wedge\neg\Box B)$
$\Box(A\to B), \neg\neg(\Box A\wedge\neg\Box B)$
$\Box(A\to B), \Box A\wedge\neg\Box B$
$\Box(A\to B), \Box A, \neg\Box B$
$A\to B, A, \neg B$
$\neg(A\wedge\neg B), A, \neg B$

$\neg A, A, \neg B$	$\neg\neg B, A, \neg B$
$\neg A, A$	$\neg\neg B, \neg B$
$\bot$	$\bot$

Korrektheit von TK:
Methode a (syntaktisch):
X K-konsistent $\Rightarrow$ X TK-konsistent
ist der Numerator einer Tableauregel K-konsistent, dann auch einer der Denominatoren; die Kontraposition davon ist: sind alle Denominatoren K-inkonsistent, dann auch der Numerator: $X, \neg A \vdash_K \bot \Rightarrow\ \vdash_K \wedge X\to A \Rightarrow\ \vdash_K \Box(\wedge X\to A) \Rightarrow\ \vdash_K \Box\wedge X\to\Box A \Rightarrow\ \vdash_K \wedge\Box X\to\Box A \Rightarrow \Box X, \neg\Box A \vdash_K \bot$.

Methode b (semantisch, unter Ausnutzung des Charakterisierungssatzes):
X $\mathcal{F}$-erfüllbar $\Rightarrow$ X TK-konsistent
ist der Numerator einer Tableauregel $\mathcal{F}$-erfüllbar, dann auch einer der Denominatoren ($\mathcal{F}$ wie oben); dies ist klar für Regeln aus TAL; für (K): $M \models \Box X, \neg\Box A[w] \Rightarrow$ es gibt ein w‘ mit wRw‘ und $M \models \neg A[w‘]$; für dieses w‘ gilt aber auch $M \models X[w‘]$.

Der schwierige Punkt ist nun, Eigenschaft (*) zu zeigen, ohne die Schnittregel (CUT*) unter den Tableauregeln zu haben.

DEFINITION (L-Modellgraph):
Zum Nachweis der Eigenschaft (*) konstruieren wir einen L-Modellgraphen wie folgt:

(I) wir teilen die Regeln von TL in drei Gruppen: strukturelle, statische und Übergangsregeln
(A) ist stets die einzige strukturelle Regel;
eine Regel ist statisch gdw gilt: ist der Numerator $\mathcal{F}$-erfüllbar in einer Welt w eines Modells M, dann ist einer der Denominatoren erfüllbar in derselben Welt w des Modells;
eine Regel ist eine Übergangsregel gdw sie weder strukturell noch statisch ist;
also sind ($\bot$), ($\neg$), ($\wedge$) und ($\neg\wedge$) statische Regeln, (K) ist ein Beispiel einer Übergangsregel.

(II) X heißt abgeschlossen unter einer Tableauregel gdw gilt: ist eine Einsetzung des Numerators in X, dann auch die entsprechende Einsetzung eines der Denominatoren;
X heißt TL-saturiert gdw X TL-konsistent und abgeschlossen unter den statischen Regeln von TL ist.

(III) sei X endlich; zu jeder Logik L definieren wir eine (von X und L abhängige) Menge X_{L*} mit folgenden Eigenschaften:
(a) X_{L*} ist endlich
(b) wenn es ein geschlossenes TL-Tableau für X gibt, dann gibt es ein geschlossenes TL-Tableau für X mit allen Knoten in X_{L*}
(c) zu jedem endlichen TL-konsistenten X gibt es ein effektives Verfahren, um ein endliches, TL-saturiertes X_* mit $X \subseteq X_* \subseteq X_{L*}$ zu konstruieren.

(IV) sei X endlich und TL-konsistent; eine endliche Struktur F = <W, R> $\in$ FRA(L) heißt L-Modellgraph für X gdw gilt:
(a) für alle $w \in W$ gilt: $w \subseteq X_{L*}$ und w ist TL-saturiert (d.h. insb. abgeschlossen unter ($\bot$), ($\neg$), ($\wedge$) und ($\neg\wedge$));
(b) $X \subseteq w_0$ für ein $w_0 \in W$;
(c) $\neg\Box A \in w \Rightarrow$ es gibt ein $w' \in W$ mit wRw‘ und $\neg A \in w'$
(d) $\Box A \in w$ und wRw‘ $\Rightarrow A \in w'$

LEMMA 10:
<W, R> ist ein L-Modellgraph für X $\Rightarrow$ X ist erfüllbar in <W, R, V> mit V(p) = $\{w \in W / p \in w\}$;
insb. gilt: <W, R> ist eine L-Struktur und ein L-Modellgraph für X $\Rightarrow$ X ist erfüllbar in einer L-Struktur.

BEWEIS:
Durch simultane Induktion nach g(A) zeigt man:
$A \in w \Rightarrow M \models A[w]$ und $\neg A \in w \Rightarrow$ nicht $M \models A[w]$:
g(A) = 0: $p \in w \Rightarrow M \models p[w]$; $\neg p \in w \Rightarrow p \notin w \Rightarrow$ nicht $M \models p[w]$; $\bot \notin w$;
g(A) > 0: $A = \neg B$: $\neg B \in w \Rightarrow$ nicht $M \models B[w] \Rightarrow M \models \neg B[w]$;
$\neg\neg B \in w \Rightarrow B \in w \Rightarrow M \models B[w] \Rightarrow$ nicht $M \models \neg B[w]$;
$A = B\wedge C$: $B\wedge C \in w \Rightarrow B\in w$ und $C \in w \Rightarrow M \models B[w]$ und $M \models C[w] \Rightarrow M \models (B\wedge C)[w]$;
$\neg(B\wedge C) \in w \Rightarrow \neg B \in w$ oder $\neg C \in w \Rightarrow$ nicht $M \models B[w]$ oder nicht $M \models C[w] \Rightarrow$ nicht $M \models (B\wedge C)[w]$

$A = \Box B$: $\Box B \in w \Rightarrow$ für alle w‘ mit wRw‘: $B \in w‘ \Rightarrow$ für alle w mit wRw‘: $M \models B[w‘] \Rightarrow M \models \Box B[w]$;
$\neg\Box B \in w \Rightarrow$ es gibt ein $w‘ \in w$ mit nicht $M \models B[w‘] \Rightarrow$ nicht $M \models \Box B[w]$;
daraus folgt, daß $M \models X[w_0]$ gilt, also ist X erfüllbar in <W, R, V>.

Dies bedeutet, daß wir zu jedem TL-konsistenten X einen L-Modellgraphen $F \in \mathcal{F}$ für X konstruieren müssen, um Eigenschaft (*) nachzuweisen; für TK verläuft dies folgendermaßen:

X_* sei $Sf(X) \cup \neg Sf(X) \cup \{\bot\}$; falls $X_{L*} = X_*$ gewählt werden kann für TL, sagen wir, daß TL die Teilformeleigenschaft besitzt; in allen Fällen ist X_{L*} immer endlich, sodaß wir nicht mehr von Teilformeln, sondern von sog. analytischen Superformeln sprechen; analytisch deshalb, da diese Superformeln nur eine bestimmte beschränkte Gestalt annehmen können.

Sei $X_{K*} = X_*$; wir müssen die Eigenschaften von X_{K*} nachweisen:
(a) X_{K*} ist endlich: klar;
(b) ist ebenfalls klar, da die Regeln von TK innerhalb von X_{K*} operieren (diese Eigenschaft würde verlorengehen, falls (CUT*) in TK enthalten wäre);
(c) sei X endlich, TK-konsistent; wir wenden Schritt für Schritt die statischen Regeln von TK auf X an und erhalten eine Folge $f = X_1, X_2, \ldots$ von TK-konsistenten Mengen $X_i \subseteq X_{K*}$ (da (b) gilt, ist die Eigenschaft, TK-konsistent zu sein, effektiv entscheidbar);
f terminiert, d.h. f bricht ab oder wird zyklisch, da X_{L*} endlich ist;
im Falle TK terminiert f ohne Zyklen, d.h. ohne Wiederholungen: denn angenommen, $f = X_1, \ldots, X_n, \ldots, X_n, \ldots$: betrachte die Anzahl der Elemente von X_n; die Regel ($\wedge$) kann nicht unmittelbar vor X_n angewendet worden sein, da sie die Anzahl der Elemente erhöht und keine Regel sie vermindert; alle anderen Regeln vermindern den Grad g(A) einer Formel A, sodaß sich ein Widerspruch ergibt;
bilde $X_* = X_1 \cup \ldots \cup X_n$.

Die Konstruktion eines K-Modellgraphen verläuft folgendermaßen:
K-Struktur: endlicher, irreflexiver, intransitiver Baum von Welten
Sei X endlich und TK-konsistent; bilde ein TK-saturiertes w_0 mit $X \subseteq w_0 \subseteq X_{K*}$;
Fall 1: keine Formel der Gestalt $\neg\Box A$ kommt in w_0 vor: $\langle w_0, \varnothing\rangle$ ist der gesuchte Modellgraph;
Fall 2: seien $B_1, \ldots, B_n$ ($n \geq 1$) alle Formeln, sodaß $\neg\Box B_i \in w_0$ ($1 \leq i \leq n$); $\Box w_0^{\Box} \cup \neg\Box B_i \subseteq w_0$ und daher TK-konsistent; nach (A) und (K) ist auch $X_i = w_0^{\Box} \cup \neg B_i$ TK-konsistent ($1 \leq i \leq n$); sei $X_i \subseteq v_i \subseteq X_{K*}$, v_i TK-saturiert; setze $w_0 \prec v_i$ für jedes v_i und fahre mit der Konstruktion für jedes v_i anstelle von w_0 fort; betrachte einen Weg $f = w_0 \prec w_1 \prec \ldots$: dieser muß ohne Zyklen terminieren, da (K) den Modalgrad l(A) einer Formel verringert, sodaß alle Nachfolger von w_i verschieden sind von w_i; wenn W die Menge aller in diesem Prozeß erzeugten Mengen ist und $R = \prec$, dann ist <W, R> eine K-Struktur und auch ein K-Modellgraph, denn es gelten die Bedingungen (i)-(iv): (i) und (ii) sind unmittelbar aus der Konstruktion ersichtlich; (iii): die Konstruktion von Nachfolgern für einen Knoten wird solange fortgesetzt, wie Formeln der Gestalt $\neg\Box A$ (im folgenden Eventualitäten genannt) in diesem Knoten enthalten sind; ein jeweiliger Nachfolger enthält dann $\neg A$; (iv) laut Konstruktion ist A in jedem Nachfolgeknoten, falls $\Box A$ im Knoten ist.

BEISPIEL:
$X = \{A, \Box E, \neg\Box C, \neg\Box A, A\wedge\Box(E\wedge D), \neg\neg E\}$
betrachte ein TK-saturiertes w_0 mit $X \subseteq w_0 \subseteq X_{K*}$:
$w_0 = \{A, \Box E, \neg\Box C, \neg\Box A, A\wedge\Box(E\wedge D), \neg\neg E, \Box(E\wedge D), E\}$

$Y = \{B_1, ..., B_n\}$, sodaß $\neg\Box B_i \in w_0$:
$Y = \{C, A\}$

$\{\Box E, \Box(E\wedge D), \neg\Box C\} \subseteq w_0$
$X_1 = \{E, E\wedge D, \neg C\}$ mit (K)-Regel
dieses saturiert ist $v_1 = \{E, E\wedge D, \neg C, D\}$

$\{\Box E, \Box(E\wedge D), \neg\Box A\} \subseteq w_0$
$X_2 = \{E, E\wedge D, \neg A\}$ mit (K)-Regel
dieses saturiert ist $v_2 = \{E, E\wedge D, \neg A, D\}$

liefert dieses (irreflexive, intransitive) Modell:

$$\begin{tikzcd} & v_1 \\ w_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & v_2 \end{tikzcd}$$

Wir betrachten Tableaukalküle für **K4**, **T**, **S4** und **G**:

Statische Regel:

(T) $$\frac{X, \Box A}{X, \Box A, A}$$

Übergangsregeln:

(K4) $$\frac{\Box X, \neg\Box A}{X, \Box X, \neg A}$$

(S4) $$\frac{\Box X, \neg\Box A}{\Box X, \neg A}$$

(G) $$\frac{\Box X, \neg\Box A}{X, \Box X, \Box A, \neg A}$$

$TK4 = TAL \cup \{(K4)\}$
$TT = TAL \cup \{(T), (K)\}$
$TS4 = TAL \cup \{(T), (S4)\}$
$TG = TAL \cup \{(G)\}$

Für L = **K4**, **T**, **S4** und **G** sei $X_{L*} = X_*$; der Nachweis der Eigenschaften von X_{L*} wird analog zu X_{K*} geführt; man beachte, daß (T) die Anzahl der Formeln erhöht und keine Regel die Anzahl verringert.

Korrektheit des Tableaukalküls für **K4**, **T**, **G**:

Korrektheit des Tableaukalküls für **S4**:
Methode a (syntaktisch):
X S4-konsistent $\Rightarrow$ X TS4-konsistent
ist der Numerator einer Tableauregel S4-konsistent, dann auch einer der Denominatoren; die Kontraposition davon ist: sind alle Denominatoren S4-inkonsistent, dann auch der Numerator:
$X, \Box A, A \vdash_{S4} \bot \Rightarrow X, \Box A \vdash \neg A \Rightarrow X \vdash \Box A \rightarrow \neg A$; und $X \vdash \Box A \rightarrow A$, daher $X \vdash \neg\Box A$, also $X, \Box A \vdash \bot$;
$\Box X, \neg A \vdash \bot \Rightarrow \Box X \vdash \neg A \rightarrow \bot \Rightarrow \wedge\Box X \vdash A \Rightarrow\ \vdash \Box\wedge X \rightarrow A \Rightarrow\ \vdash \Box\Box\wedge X \rightarrow \Box A \Rightarrow\ \vdash \Box\wedge X \rightarrow \Box A \Rightarrow \Box X, \neg\Box A \vdash \bot$.

Methode b (semantisch, unter Ausnutzung des Charakterisierungssatzes):
X $\mathcal{F}$-erfüllbar $\Rightarrow$ X TS4-konsistent
sei $M \models X, \Box A[w]$ und M ein S4-Modell $\Rightarrow$ (da R reflexiv ist) $M \models X, \Box A, A[w]$; sei $M \models \Box X, \neg\Box A[w]$ und M ein S4-Modell $\Rightarrow$ es gibt ein w‘ mit wRw‘ und $M \models \neg A[w']$; für dieses w‘ muß aber auch $M \models \Box X[w']$ gelten, da R transitiv ist; analog für die übrigen Kalküle.

Vollständigkeit des Tableaukalküls für **K4**, **T**:
K4-Struktur: endlicher, (transitiver) Baum von Clustern
T-Struktur: endlicher, reflexiver, intransitiver Baum von Welten

Vollständigkeit des Tableaukalküls für **S4**:
S4-Struktur: endlicher, (transitiver) Baum von nichtdegenerierten Clustern
Sei X endlich und TS4-konsistent; bilde ein TS4-saturiertes w_0 mit $X \subseteq w_0 \subseteq X_{S4*}$;
Fall 1: keine Formel der Gestalt $\neg\Box A$ kommt in w_0 vor: $\langle w_0, \{\langle w0, w0\rangle\}\rangle$ ist der gesuchte Modellgraph;
Fall 2: sei $Y = \{B_1, ..., B_n\}$ ($n \geq 1$) die Menge aller Formeln, sodaß $\neg\Box B_i \in w_0$ und $\neg Bi \notin w_0$; falls $Y = \emptyset$, siehe Fall 1; falls $Y \neq \emptyset$, bilde Nachfolger mit der (S4)-Regel: $\Box w_0^{\Box} \cup \neg\Box B_i \subseteq w_0$ und daher TS4-konsistent; nach (A) und (S4) ist auch $X_i = \Box w_0^{\Box} \cup \neg B_i$ TS4-konsistent ($1 \leq i \leq n$); sei $X_i \subseteq v_i \subseteq X_{S4*}$, v_i TS4-saturiert; setze $w_0 \prec v_i$ für jedes v_i und fahre mit der Konstruktion für jedes v_i anstelle von w_0 fort; betrachte eine Folge $f = w_0 \prec w_1 \prec ...$ bricht entweder ab oder wird zyklisch; im letzteren Fall identifizieren wir diejenigen w_m und w_n mit $w_m = w_n$ und m+n minimal und erhalten einen Kreis; R sei der transitive und reflexive Abschluß von $\prec$; $\langle W, R\rangle$ ist eine S4-Struktur und ein S4-Modellgraph; (i)-(iii) sind nach Konstruktion erfüllt; (iv): jede Formel der Gestalt $\Box A$ wird durch die Regel (S4) in jeden Nachfolger eines Knoten mitgenommen, wo dann aufgrund der Regel (T) auch A enthalten ist.

BEISPIEL:
$X = \{A, \Box E, \neg\Box C, \neg\Box A, A\wedge\Box(E\wedge D), \neg\neg E\}$
betrachte ein TS4-saturiertes w_0 mit $X \subseteq w_0 \subseteq X_{S4*}$:
$w_0 = \{A, \Box E, \neg\Box C, \neg\Box A, A\wedge\Box(E\wedge D), \neg\neg E, E, \Box(E\wedge D), E\wedge D, D\}$

$Y = \{B_1, ..., B_n\}$, sodaß $\neg\Box B_i \in w_0$ und $\neg Bi \notin w_0$:
$Y = \{C, A\}$

$\{\Box E, \Box(E\wedge D), \neg\Box C\} \subseteq w_0$
$X_1 = \{\Box E, \Box(E\wedge D), \neg C\}$ mit (S4)-Regel
dieses saturiert ist $v_1 = \{\Box E, \Box(E\wedge D), \neg C, E, E\wedge D, D\}$

$\{\Box E, \Box(E\wedge D), \neg\Box A\} \subseteq w_0$
$X_2 = \{\Box E, \Box(E\wedge D), \neg A\}$ mit (S4)-Regel
dieses saturiert ist $v_2 = \{\Box E, \Box(E\wedge D), \neg A, E, E\wedge D, D\}$

liefert dieses Modell, mit reflexivem (und transitivem) Abschluß:

$$\begin{tikzcd} & v_1 \\ w_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & v_2 \end{tikzcd}$$

Vollständigkeit des Tableaukalküls für **G**:
G-Struktur: endlicher (transitiver, irreflexiver) Baum von degenerierten Clustern
Fall 1: keine Formel der Gestalt $\neg\Box A$ kommt in w_0 vor: $<w_0, \emptyset>$ ist der gesuchte Modellgraph;
Fall 2: sei $Y = \{B_1, ..., B_n\}$ $(n\geq 1)$ die Menge aller Formeln, sodaß $\neg\Box B_i \in w_0$; die Konstruktion verläuft wie bei TS4, nur mit der Regel (G) anstelle von (S4); betrachte die Folge $f = w_0 \prec w_1 \prec ...$: da w_i einen Nachfolger hat, gibt es ein $\neg\Box B \in w_i$ und $\Box B \in w_{i+j}$, d.h. die Folge f bricht ohne Zyklus ab; R sei der transitive Abschluß von $\prec$.

Übungen zu Kapitel 3:

1 Testen Sie einige Tautologien mit dem Kalkül T1.

2 Vervollständigen Sie den Beweis von Lemma 2.

3 Beweisen Sie die Umkehrung von Lemma 3.

4 Vervollständigen Sie den Beweis von Lemma 6.

5 Vervollständigen Sie den Beweis von Lemma 7.

6 Testen Sie einige Tautologien mit den Kalkülen T2 und T3.

7 Testen Sie einige Deduktionen, wie etwa $(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A$, auf Gültigkeit mit T1, T2, T3.

8 Zeigen Sie Korrektheit und Vollständigkeit von T3.

Hinweis zu Übung 8:

Neu sind Regel ($\perp$) und Regel (A); Regel ($\perp$) bringt zum Ausdruck, daß ein Widerspruch erreicht ist, wenn eine Formel sowohl links als auch rechts vom Strich steht; Regel (A) bringt zum Ausdruck, daß nicht alle Formeln von einem Knoten zum anderen mitgeschleppt werden müssen.
Zeigen Sie: wenn es ein nichtgeschlossenes Tableau für X gibt, dann gibt es einen nichtgeschlossenen Ast dieses Tableaus, der ohne Anwendung der Regel (A) konstruiert wurde.