4 Sequenzenkalküle

4.1 Klassische Aussagenlogik

4.1.1 Einleitung

Bei Axiom-Regel-Kalkülen im Stile von Hilbert-Frege ist der Begriff des Theorems primärer Begriff: man definiert mithilfe von (mehreren, vielen) Axiomen und (wenigen, im Falle der Aussagenlogik einer einzigen) Regel(n), wann eine Formel Theorem ist, $\vdash_{HF}$ A. Dann definiert man als sekundären Begriff den Begriff der Konsequenzrelation X $\vdash_{HF}$ A. Mit anderen Worten, die Information eines Axiom-Regel-Kalküls steckt überwiegend in den Axiomen.
Sequenzenkalküle sind Regel-Kalküle zur Herleitung von Sequenzen X $\vdash$ Y. Mithilfe von wenigen Axiom(enschemata) und mehreren (vielen) Schlussregeln wird der hier als primärer Begriff derjenige der Herleitbarkeit einer Sequenz definiert. Eine Formel A ist dann herleitbar (oder beweisbar) in einem Sequenzenkalkül, wenn die Sequenz $\emptyset \vdash$ A herleitbar ist. Mit anderen Worten, die Information eines Regel-Kalküls steckt überwiegend in den Regeln.

In der Literatur gibt es viele verschiedene Varianten von Sequenzenkalkülen, die sich hinsichtlich der Definition einer Sequenz und hinsichtlich der verwendeten Axiome und Regeln unterscheiden.
Es gibt im Prinzip drei Möglichkeiten, Sequenzen zu definieren, u.z. mithilfe von endlichen Folgen, Multimengen oder Mengen von Formeln.
Eine Multimenge ist eine Menge, in der ein und dasselbe Element mehrfach vorkommen kann (oder anders ausgedrückt, eine Multimenge ist eine Folge, bei der es nicht auf die Reihenfolge der Folgenglieder ankommt); eine Menge ist eine Multimenge, in der jedes Element genau einmal vorkommt; formal definiert:

DEFINITION (Multimenge über einer Menge X):
Eine Multimenge über einer Menge X ist eine Abbildung f: $X \to \mathbb{N}_0$, wobei f(A) = n bedeutet, daß die Multimenge f genau n Vorkommnisse des Elementes A $\in$ X enthält; f(A) = 0 bedeutet, daß A kein Element von f ist.

DEFINITION (Vokabular eines Sequenzenkalküls):
Das Vokabulars eines Sequenzenkalküls ist das Vokabular der formalen Sprache für die klassische Aussagenlogik AL, vermehrt um das autonym verwendete Zeichen $\vdash$ (Sequenzenzeichen), sowie, im Falle der Definition von Sequenzen mithilfe von Formelfolgen, vermehrt um das Hilfszeichen , (Beistrich).

DEFINITION (Sequenz):
Sind X und Y endliche Folgen von wohlgeformten Formeln, so ist X $\vdash$ Y eine Sequenz.
Sind X und Y endliche Multimengen von wohlgeformten Formeln, so ist X $\vdash$ Y eine Sequenz.
Sind X und Y endliche Mengen von wohlgeformten Formeln, so ist X $\vdash$ Y eine Sequenz.

BEMERKUNG:
Die Formeln in X (X kann auch leer sein) heißen Antezedensformeln, die Formeln in Y (Y kann ebenfalls leer sein) heißen Sukzedensformeln der Sequenz $X \vdash Y$. Ist X oder Y leer, schreiben wir oft auch zur besseren Verdeutlichung dieser Tatsache $\emptyset \vdash Y$ bzw. $X \vdash \emptyset$.

Jede der betrachteten Varianten von Sequenzenkalkülen besteht aus Axiomen(schemata), logischen Schlussregeln und Strukturschlussregeln.

ÜBERSICHT (über verwendete Axiome und Regeln):

Axiome(nschemata):

$p \vdash p$	(Ax)
$A \vdash A$	(Ax*)
$X, p \vdash p, Y$	(AX)
$X, A \vdash A, Y$	(AX*)
$\bot \vdash$	($\bot$ L)
$X, \bot \vdash Y$	($\bot$ LL)

(Grund-)Schlussregeln:
Logische Regeln:
linke logische Regeln:

$$\frac{A, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y} \qquad (\wedge\ L1)$$

$$\frac{B, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y} \qquad (\wedge\ L2)$$

$$\frac{A, B, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y} \qquad (\wedge\ L)$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, Z \vdash U}{A \vee B, X, Z \vdash Y, U} \qquad (\vee\ L)$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, X \vdash Y}{A \vee B, X \vdash Y} \qquad (\vee\ La)$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, X \vdash U}{A \vee B, X \vdash Y, U} \qquad (\vee\ Lb)$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, Z \vdash Y}{A \vee B, X, Z \vdash Y} \qquad (\vee\ Lc)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, Z \vdash U}{A \rightarrow B, X, Z \vdash Y, U} \qquad (\rightarrow\ L)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, X \vdash Y}{A \to B, X \vdash Y} \quad (\to La)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, X \vdash U}{A \to B, X \vdash Y, U} \quad (\to Lb)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, Z \vdash Y}{A \to B, X, Z \vdash Y} \quad (\to Lc)$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y} \quad (\neg L)$$

rechte logische Regeln:

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad Z \vdash U, B}{X, Z \vdash Y, U, A \wedge B} \quad (\wedge R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \wedge B} \quad (\wedge Ra)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad X \vdash U, B}{X \vdash Y, U, A \wedge B} \quad (\wedge Rb)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad Z \vdash Y, B}{X, Z \vdash Y, A \wedge B} \quad (\wedge Rc)$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{X \vdash Y, A \vee B} \quad (\vee R1)$$

$$\frac{X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \vee B} \quad (\vee R2)$$

$$\frac{X \vdash Y, A, B}{X \vdash Y, A \vee B} \quad (\vee R)$$

$$\frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \to B} \quad (\to R)$$

$$\frac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A} \quad (\neg R)$$

Strukturschlussregeln:
linke Strukturschlussregeln:

$$\frac{X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \quad (AB\ L)$$

$$\frac{A, A, X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \qquad \text{(KÜ L)}$$

$$\frac{X, A, B, Z \vdash Y}{X, B, A, Z \vdash Y} \qquad \text{(VE L)}$$

rechte Strukturschlussregeln:

$$\frac{X \vdash Y}{X \vdash Y, A} \qquad \text{(AB R)}$$

$$\frac{X \vdash Y, A, A}{X \vdash Y, A} \qquad \text{(KÜ R)}$$

$$\frac{X \vdash Y, A, B, U}{X \vdash Y, B, A, U} \qquad \text{(VE R)}$$

Eine Strukturschlussregel verdient besondere Aufmerksamkeit, u.z. die Schnittregel:

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad A, Z \vdash U}{X, Z \vdash Y, U} \qquad \text{(CUT)}$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad A, X \vdash Y}{X \vdash Y} \qquad \text{(CUTa)}$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad A, X \vdash U}{X \vdash Y, U} \qquad \text{(CUTb)}$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad A, Z \vdash Y}{X, Z \vdash Y} \qquad \text{(CUTc)}$$

BEMERKUNG:
Wir schreiben A, X etc. für:
die Folge, die man durch Hintereinanderschreiben des Folgengliedes A und der Folge X erhält; bzw.
$\{A\}\cup X$, verstanden als Vereinigung von Multimengen, wobei A bzw. $\{A\}$ als diejenige Multimenge aufgefaßt wird, die das Element A mit genau einem Vorkommnis enthält; bzw.
$\{A\}\cup X$, verstanden als Vereinigung von Mengen.

BEMERKUNG:
Eine einprämissige Regel wie ($\wedge$ L1) wird dabei verstanden als Menge von geordneten Paaren von Sequenzen $\{\langle A, X \vdash Y, A\wedge B, X \vdash Y\rangle$ / $A, B \in$ WFF; X, Y Folgen, Multimengen oder Mengen von Formeln, die jeweils auch leer sein können$\}$; analog für die anderen Regeln (im Fall der zweiprämissigen Regeln werden diese verstanden als Mengen von geordneten Tripeln von Sequenzen).

BEMERKUNG:
(AB L) und (AB R) heißen Abschwächungsregeln (weakening) oder Verdünnungsregeln (thinning); (KÜ L) und (KÜ R) heißen Kürzungsregeln oder Zusammenziehungsregeln (contraction); (VE L) und (VE R) heißen Vertauschungsregeln (exchange, interchange).

DEFINITION (Haupt-, Neben-, Kontextformel):
Die Formel, die in der Konklusion einer logischen Regel neu gebildet wird, heißt Hauptformel, die Formel(n) in der/den Prämisse(n), aus der/denen die Hauptformel gebildet wird, heißt/en Nebenformel(n). So ist z.B. bei der Regel ($\wedge$ L1) $A \wedge B$ die Hauptformel, A die Nebenformel.
Die Formeln X, Y, U, Z der logischen Regeln heißen Kontext(formeln).
Bei der zweiprämissigen Regel ($\vee$ L) kann der Kontext der beiden Prämissen verschieden sein, bei ($\vee$ La) muß der Kontext der beiden Prämissen identisch sein; bei ($\vee$ Lb) muß der Kontext im Antezedens der beiden Prämissen identisch sein, bei ($\vee$ Lc) der Kontext im Sukzedens; analog für die anderen zweiprämissigen Regeln.

BEMERKUNG (weitere mögliche Eigenschaften von Folgerungsbegriffen $X \vdash Y$):
$A \in X \Rightarrow X \vdash Y, A$ (Reflexivität)
$A \in Y \Rightarrow A, X \vdash Y$ (Reflexivität)
$X \cap Y \subseteq AV \Rightarrow X \vdash Y$
$X \cap Y \neq \varnothing \Rightarrow X \vdash Y$
$X \vdash Y$ und $X \subseteq X^* \Rightarrow X^* \vdash Y$ (linke Monotonie)
$X \vdash Y$ und $Y \subseteq Y^* \Rightarrow X \vdash Y^*$ (rechte Monotonie)
$X \vdash Y, A$ und $A, X \vdash Y \Rightarrow X \vdash Y$ (Schnitt, CUT)
$X \vdash A$ und $A \vdash Y \Rightarrow X \vdash Y$ (unitärer Schnitt)
$X \vdash Y, A$ und $A, X \vdash Y \Rightarrow X \vdash Y, A \in Sf(X \cup Y)$ (analytischer Schnitt)
$X \vdash Y, A$ und $A, Z \vdash U \Rightarrow X, Z \vdash Y, U$ (Schnitt, CUT)
$X \vdash Y, A^m$ und $A^n, X \vdash Y \Rightarrow X \vdash Y$, $m, n \geq 1$ (Multischnitt, Mix, MUT)
$X \vdash Y, A^m$ und $A^n, Z \vdash U \Rightarrow X, Z \vdash Y, U$, $m, n \geq 1$ (Multischnitt, Mix, MUT)
$X \vdash Y$ und $X \vdash Z \Rightarrow X, Y \vdash Z$ (eingeschränkte Monotonie)
$X, Y \vdash Z$ und $X \vdash Y \Rightarrow X \vdash Z$ (Transitivität)
$X, Y \vdash Z$ und $U \vdash Y \Rightarrow X, U \vdash Z$ (Transitivität, Variante 2)
(für alle $A \in Y$: $X \vdash A$) und $Y \vdash Z \Rightarrow X \vdash Z$ (Abschlusseigenschaft)
$X \vdash Y \Rightarrow$ es gibt ein endliches $X^* \subseteq X$ mit $X^* \vdash Y$ (Endlichkeit)
$A, X \vdash Y, B$ gdw $X \vdash Y, A \rightarrow B$ (Deduktionstheorem)
für alle Substitutionen s gilt: $X \vdash Y \Rightarrow sX \vdash sY$ (abgeschlossen unter Substitution)
für alle Substitutionen s gilt: $X \vdash Y \Rightarrow X \vdash sY$ (abgeschlossen unter der Substitutionsregel)
$X \vdash Y, A$ und $A \leftrightarrow B \Rightarrow X \vdash Y, B$ (abgeschlossen unter L-äquivalenter Umformung der Konklusion)

DEFINITION (Sequenzenkalkül):
Ein Sequenzenkalkül S ist eine Menge von Axiomen(schemata) und Grundschlussregeln.

DEFINITION (Herleitbarkeit in einem Sequenzenkalkül):
Der Begriff der Herleitbarkeit in einem Sequenzenkalkül wird induktiv definiert:
Alle Axiome sind herleitbar
Sind die Prämissen einer Grundschlussregel herleitbar, dann auch die Konklusion

BEMERKUNG:
Sei S ein Sequenzenkalkül und $\mathfrak{R}$ eine Schlussregel; wir schreiben S + $\mathfrak{R}$ für denjenigen Sequenzenkalkül, der aus S durch Hinzunahme von $\mathfrak{R}$ zu den Grundschlussregeln von S entsteht bzw. S - $\mathfrak{R}$ für denjenigen Sequenzenkalkül, der aus S durch Wegnahme von $\mathfrak{R}$ von den Grundschlussregeln von S entsteht.

DEFINITION (Äquivalenz von Sequenzenkalkülen):
Seien S_1 und S_2 zwei Sequenzenkalküle; S_1 und S_2 heißen äquivalent gdw gilt:
$X \vdash Y$ herleitbar in S_1 gdw $X \vdash Y$ herleitbar in S_2

DEFINITION (zulässige, direkt, indirekt ableitbare Schlussregel):
Eine Schlussregel $\mathfrak{R}$ heißt zulässig in S gdw S und S + $\mathfrak{R}$ äquivalent sind.
Eine Schlussregel heißt direkt ableitbar in S gdw ihre Anwendung durch eine Folge von Anwendungen von Grundschlussregeln von S ersetzt werden kann.
Eine in S zulässige, nicht direkt ableitbare Regel heißt indirekt ableitbar in S.

LEMMA 1:
S enthalte die Regel X; dann ist die Regel Y direkt ableitbar in S, falls in S die Regeln im Schnittpunkt von X und Y zulässig sind; analog für die drei anderen zweiprämissigen Regeln:

X \ Y	($\wedge$ R)	($\wedge$ Ra)	($\wedge$ Rb)	($\wedge$ Rc)
($\wedge$ R)	$\emptyset$	(KÜ L), (KÜ R)	(KÜ L)	(KÜ R)
($\wedge$ Ra)	(AB L), (AB R)	$\emptyset$	(AB R)	(AB L)
($\wedge$ Rb)	(AB L)	(KÜ R)	$\emptyset$	(AB L), (KÜ R)
($\wedge$ Rc)	(AB R)	(KÜ L)	(AB R), (KÜ L)	$\emptyset$

BEWEIS:

$$\dfrac{\dfrac{X \vdash Y, A \qquad X \vdash Y, B}{X, X \vdash Y, Y, A\wedge B}\ (\wedge\ R)}{X \vdash Y, A\wedge B}\ (KÜ\ L), (KÜ\ R)$$

$$\dfrac{\dfrac{X \vdash Y, A \qquad X \vdash U, B}{X, X \vdash Y, U, A\wedge B}\ (\wedge\ R)}{X \vdash Y, U, A\wedge B}\ (KÜ\ L)$$

$$\dfrac{\dfrac{X \vdash Y, A \qquad Z \vdash Y, B}{X, Z \vdash Y, Y, A\wedge B}\ (\wedge\ R)}{X, Z \vdash Y, A\wedge B}\ (KÜ\ R)$$

$$\dfrac{\dfrac{X \vdash Y, A}{X, Z \vdash Y, U, A} \qquad \dfrac{Z \vdash U, B}{X, Z \vdash Y, U, B}\ (AB\ L), (AB\ R)}{X, Z \vdash Y, U, A\wedge B}\ (\wedge\ Ra)$$

$$\dfrac{\dfrac{X \vdash Y, A}{X \vdash Y, U, A} \qquad \dfrac{X \vdash U, B}{X \vdash Y, U, B}\ (AB\ R)}{X \vdash Y, U, A\wedge B}\ (\wedge\ Ra)$$

X ⊢ Y, A	Z ⊢ Y, B	
X, Z ⊢ Y, A	X, Z ⊢ Y, B	(AB L)
X, Z ⊢ Y, A∧B		(∧ Ra)

X ⊢ Y, A	Z ⊢ U, B	
X, Z ⊢ Y, A	X, Z ⊢ U, B	(AB L)
X, Z ⊢ Y, U, A∧B		(∧ Rb)

X ⊢ Y, A	X ⊢ Y, B	
X ⊢ Y, Y, A∧B		(∧ Rb)
X ⊢ Y, A∧B		(KÜ R)

X ⊢ Y, A	Z ⊢ Y, B	
X, Z ⊢ Y, A	X, Z ⊢ Y, B	(AB L)
X, Z ⊢ Y, Y, A∧B		(∧ Rb)
X, Z ⊢ Y, A∧B		(KÜ R)

X ⊢ Y, A	Z ⊢ U, B	
X ⊢ Y, U, A	Z ⊢ Y, U, B	(AB R)
X, Z ⊢ Y, U, A∧B		(∧ Rc)

X ⊢ Y, A	X ⊢ Y, B	
X, X ⊢ Y, A∧B		(∧ Rc)
X, ⊢ Y, A∧B		(KÜ L)

X ⊢ Y, A	X ⊢ U, B	
X ⊢ Y, U, A	X ⊢ Y, U, B	(AB R)
X, X ⊢ Y, U, A∧B		(∧ Rc)
X ⊢ Y, U, A∧B		(KÜ L)

LEMMA 2:
S enthalte die Regel(n) X; dann ist/sind die Regel(n) Y direkt ableitbar in S, falls in S die Regel im Schnittpunkt von X und Y zulässig ist:

X \ Y	(∧ L1), (∧ L2)	(∧ L)
(∧ L1), (∧ L2)	∅	(KÜ L)
(∧ L)	(AB L)	∅

X \ Y	(∨ L1), (∨ L2)	(∨ L)
(∨ L1), (∨ L2)	∅	(KÜ R)
(∨ L)	(AB R)	∅

BEWEIS:

A, B, X ⊢ Y	
A∧B, B, X ⊢ Y	(∧ L1)
A∧B, A∧B, X ⊢ Y	(∧ L2)
A∧B, X ⊢ Y	(KÜ L)

$\underline{A, X \vdash Y}$	
$\underline{A, B, X \vdash Y}$	(AB L)
$A \wedge B, X \vdash Y$	($\wedge$ L)

$\underline{X \vdash Y, A, B}$	
$\underline{X \vdash Y, A \vee B, B}$	($\vee$ R1)
$\underline{X \vdash Y, A \vee B, A \vee B}$	($\vee$ R2)
$X \vdash Y, A \vee B$	(KÜ R)

$\underline{X \vdash Y, A}$	
$\underline{X \vdash Y, A, B}$	(AB R)
$X \vdash Y, A \vee B$	($\vee$ R)

4.1.2 Die Variante S2 und die Adäquatheit von S2$^+$

Wir betrachten zuerst einen Sequenzenkalkül in der Formulierung von Multimengen, u.z. die Variante S2:

DEFINITION (S2):
Sind X und Y endliche Multimengen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz
S2 enthalte folgende Axiome und Grundschlussregeln:
Axiome: (Ax), ($\perp$ L)
Linke logische Regeln: ($\wedge$ L1), ($\wedge$ L2), ($\vee$ L), ($\rightarrow$ L), ($\neg$ L)
Rechte logische Regeln: ($\wedge$ R), ($\vee$ R1), ($\vee$ R2), ($\rightarrow$ R), ($\neg$ R)
Linke Strukturschlussregeln: (AB L), (KÜ L)
Rechte Strukturschlussregeln: (AB R), (KÜ R)

BEMERKUNG:
Im allgemeinen ist jeder Sequenzenkalkül symmetrisch, d.h. zu jedem Junktor gibt es eine (oder zwei) Einführungsregel(n) sowohl links als auch rechts vom Sequenzenzeichen $\vdash$.

BEMERKUNG (zur verwendeten Signatur):
S2 ist in der Signatur $\{\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ formuliert;
man erhält eine Variante S2‘ in der Signatur $\{\perp, \wedge, \vee, \rightarrow\}$, indem man ($\neg$ L) und ($\neg$ R) streicht, also S2‘ = S2 – {($\neg$ L), ($\neg$ R)}; definiert man $\neg A := A\rightarrow\perp$, kann man leicht zeigen, daß die Negationsregeln dann herleitbar sind in S2‘‘:

$\underline{X \vdash Y, A \qquad \perp \vdash}$	Annahme, ($\perp$ L)
$A\rightarrow\perp, X \vdash Y$	($\rightarrow$ L)

$\underline{A, X \vdash Y}$	Annahme
$\underline{A, X \vdash Y, \perp}$	(AB R)
$X \vdash Y, A\rightarrow\perp$	($\rightarrow$ R)

man erhält eine Variante S2‘‘ in der Signatur $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$, indem man ($\perp$ L) streicht, also S2‘‘ = S2 – {($\perp$ L)}; definiert man $\perp := p_1\wedge\neg p_1$, kann man leicht zeigen, daß $p_1\wedge\neg p_1 \vdash$ herleitbar ist in S2‘:

$\underline{p_1 \vdash p_1}$	(Ax)
$\underline{\neg p_1, p_1 \vdash}$	($\neg$ L)
$\underline{\neg p_1, p_1\wedge\neg p_1 \vdash}$	($\wedge$ L1)
$\underline{p_1\wedge\neg p_1, p_1\wedge\neg p_1 \vdash}$	($\wedge$ L2)
$p_1\wedge\neg p_1 \vdash$	(KÜ L)

BEMERKUNG:
S2a entspricht dem Kalkül G1cp in der Signatur $\{\perp, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ von Troelstra/Schwichtenberg (1996).

DEFINITION (S2$^+$):
S2$^+$ sei S2 + (CUT)

BEMERKUNG:
$X \vdash Y$ herleitbar in S2 $\Rightarrow$ $X \vdash Y$ herleitbar in S2$^+$

LEMMA 3:
(Ax*), (AX), (AX*) und ($\perp$ LL) sind herleitbar in S2

BEWEIS:
Siehe Abschnitt 4.1.6.

FOLGERUNG:
S2 - (Ax) + (Ax*) und S2 sind äquivalent
$S2^+$ - (Ax) + (Ax*) und $S2^+$ sind äquivalent

BEMERKUNG:
Sei S ein Sequenzenkalkül; man könnte z.B. X $\vdash_S$ Y dafür schreiben, daß X $\vdash$ Y herleitbar in S ist; da $\vdash$ aber ein objektsprachliches Zeichen ist, ist diese Analogie zu $\vdash_{HF}$ nicht ganz korrekt. Eine bessere Schreibweise wäre daher etwa S $\Rightarrow$ X $\vdash$ Y (oder auch S $\vdash$ X $\Rightarrow$ Y), aber bei uns ist $\Rightarrow$ für die metasprachliche Implikation reserviert (und wir verwenden $\vdash$ für das Sequenzenzeichen und nicht $\Rightarrow$); deshalb werden wir immer genau den Sequenzenkalkül angeben, auf den wir uns bei Herleitungen beziehen, um Verwechslungen auszuschließen.

LEMMA 4 (Beispiele für Herleitungen in S2):
Folgende Sequenzen sind herleitbar in S2:
B1: $\vdash \neg A \leftrightarrow (A \rightarrow \perp)$
B2: $\vdash \perp \leftrightarrow A \wedge \neg A$
B3: $\vdash A \vee \neg A$
B4: $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
B5: $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
B6: $\vdash A \wedge \neg A \rightarrow B$
B7: $\vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$
B8: $\vdash \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg (A \vee B))$
B9: $\vdash (\neg A \rightarrow \perp) \rightarrow A$
B10: $A, A \rightarrow B \vdash B$
B11: $A, B \vdash A \wedge B$
B12: $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \wedge B \rightarrow C$
B13: $A \vee B \vdash A, B$
Ax10: $\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
Ax11: $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$
Ax12: $\vdash \perp \rightarrow A$
Ax13: $\vdash A \vee (A \rightarrow \perp)$

BEWEIS:
Siehe Abschnitt 4.1.6.

Hauptziel dieses Abschnitts ist es, zu zeigen, daß $S2^+$ adäquat bzgl. der Aussagenlogik ist, d.h. daß gilt: $\vdash_{HF}$ A gdw $\vdash$ A ist in $S2^+$ herleitbar.

DEFINITION (Korrektheit, Vollständigkeit und Adäquatheit eines Sequenzenkalküls):
Sei S ein Sequenzenkalkül;
S heißt korrekt bzgl. AL gdw für alle A gilt: $\vdash A$ herleitbar in S $\Rightarrow\ \vdash_{HF} A$
S heißt vollständig bzgl. AL gdw für alle A gilt: $\vdash_{HF} A \Rightarrow\ \vdash A$ herleitbar in S
S heißt adäquat (bzgl. AL) gdw S korrekt und vollständig bzgl. AL ist.

DEFINITION (die einer Sequenz entsprechende Formel):
Die der Sequenz $X \vdash Y$ entsprechende Formel $E(X\vdash Y)$ wird definiert durch:
$X \neq \emptyset$ und $Y \neq \emptyset$: $E(X\vdash Y) = \wedge X \rightarrow \vee Y$
$X = \emptyset$ und $Y \neq \emptyset$: $E(X\vdash Y) = \vee Y$
$X \neq \emptyset$ und $Y = \emptyset$: $E(X\vdash Y) = \neg\wedge X$
$X = \emptyset$ und $Y = \emptyset$: $E(X\vdash Y) = \bot$

LEMMA 5:
$X \vdash Y$ herleitbar in $S2^+$ gdw $\vdash E(X\vdash Y)$ herleitbar in $S2^+$

BEWEIS:
Siehe Abschnitt 4.1.6.

BEMERKUNG:
Sei S ein Sequenzenkalkül;
A heißt S-beweisbar gdw $\emptyset \vdash A$ herleitbar;
X heißt S-inkonsistent gdw $X \vdash \emptyset$ herleitbar; sonst S-konsistent.
Sei $S = S2^+$, dann gilt:
(i) X S-inkonsistent gdw $X \vdash \bot$ herleitbar in S;
(ii) S ist korrekt bzgl. AL gdw für alle X, X endlich gilt: (X konsistent $\Rightarrow$ X S-konsistent)
(iii) S ist vollständig bzgl. AL gdw für alle X, X endlich gilt: (X S-konsistent $\Rightarrow$ X konsistent)
Beweis:
(i) klar
(ii) $\Rightarrow$: A S-beweisbar $\Rightarrow \neg A$ S-inkonsistent $\Rightarrow \neg A$ inkonsistent $\Rightarrow A \in$ PC
$\Leftarrow$: X S-inkonsistent $\Rightarrow \neg\wedge X$ S-beweisbar $\Rightarrow \neg\wedge X \in$ PC $\Rightarrow$ X inkonsistent
(iii) $\Rightarrow$: $A \in$ PC $\Rightarrow \neg A$ inkonsistent $\Rightarrow \neg A$ S-inkonsistent $\Rightarrow$ A S-beweisbar
$\Leftarrow$: X inkonsistent $\Rightarrow \neg\wedge X \in$ PC $\Rightarrow \neg\wedge X$ S-beweisbar $\Rightarrow \neg\neg\wedge X$ S-inkonsistent $\Rightarrow$ X S-inkonsistent

LEMMA 6 (Vollständigkeit von $S2^+$):
$\vdash_{HF} A \Rightarrow\ \vdash A$ herleitbar in $S2^+$

BEWEIS:
Herleitungsinduktion in PC bzw. H1:
Induktionsanfang: für alle Axiome Ax gilt: $\vdash Ax$ herleitbar in $S2^+$:
siehe Abschnitt 4.1.6.

Induktionsschritt: sind $\vdash A$ und $\vdash A \to B$ herleitbar in $S2^+$, dann auch $\vdash B$:
Dies läßt sich nur mit Hilfe der Schnittregel beweisen:

$$\dfrac{\vdash A \to B \qquad \dfrac{\vdash A \qquad \dfrac{A \vdash A \qquad B \vdash B}{A, A \to B \vdash B}\,\text{(IV), }(\to L)}{A \to B \vdash B}\,\text{(IV), (CUT)}}{\vdash B}\,\text{(CUT)}$$

(Ax*)

LEMMA 7 (Korrektheit von $S2^+$):
$\vdash A$ herleitbar in $S2^+ \Rightarrow\ \vdash_{HF} A$

BEWEIS:
Wir zeigen:
$X \vdash Y \Rightarrow\ \vdash_{HF} E(X \vdash Y)$ durch Herleitungsinduktion in $S2^+$:
Induktionsanfang:
$\vdash_{HF} E(p \vdash p)$, also $\vdash_{HF} p \to p$
$\vdash_{HF} E(\bot \vdash)$, also $\vdash_{HF} \neg\bot$
Induktionsschritt (ÜBUNG):
Für alle Regeln <P1, (P2,) K> des Sequenzenkalküls $S2^+$ ist zu zeigen:
$\vdash_{HF} E(P1), (\vdash_{HF} E(P2)) \Rightarrow\ \vdash_{HF} E(K)$, so z.B. für ($\wedge$ L1):
$\vdash_{HF} E(A, X \vdash Y) \Rightarrow\ \vdash_{HF} E(A \wedge B, X \vdash Y)$, also $\vdash_{HF} A \wedge (\wedge X) \to Y \Rightarrow\ \vdash_{HF} A \wedge B(\wedge X) \to Y$

BEMERKUNG:
Falls wir die schwache Vollständigkeit der Aussagenlogik ($\models A \Rightarrow\ \vdash_{HF} A$) voraussetzen können, genügt es, durch Herleitungsinduktion zu zeigen, daß gilt:
$X \vdash Y$ herleitbar $\Rightarrow\ \models E(X \vdash Y)$
Induktionsanfang:
$\models p \to p$
$\models \neg\bot$
Induktionsschritt z.B. für ($\wedge$ L1): $\models A \wedge (\wedge X) \to Y \Rightarrow\ \models A \wedge B \wedge (\wedge X) \to Y$
daraus folgt insb. $\vdash A$ herleitbar in S2 $\Rightarrow\ \models A$.

BEMERKUNG:
Es gilt auch folgende Umkehrung:
$\vdash_{HF} E(X \vdash Y) \Rightarrow X \vdash Y$ ist herleitbar in S2, denn aus $\vdash_{HF} E(X \vdash Y)$ folgt mit LEMMA 6: $\vdash E(X \vdash Y)$ herleitbar, und daraus mit LEMMA 5: $X \vdash Y$ herleitbar.

BEMERKUNG:
Man könnte auch (vielleicht direkter und einfacher) folgendes zeigen:
(i) $X \vdash_{HF} A$ gdw $X \vdash A$ ist herleitbar; also:
$X \vdash_{HF} A \Rightarrow X \vdash A$ ist herleitbar: dies funktioniert genauso wie oben;
$X \vdash Y$ ist herleitbar $\Rightarrow X \vdash_{HF} \vee Y$ (falls $Y = \emptyset$, sei $\vee Y = \bot$): dies ist einfacher zu zeigen, so etwa für ($\wedge$ L1): $A, X \vdash_{HF} \vee Y \Rightarrow A \wedge B, X \vdash_{HF} \vee Y$, man benötigt dazu einfach $\vdash_{HF} A \wedge B \to A$, und das ist Ax3a;
(ii) $X \vdash Y$ ist herleitbar $\Rightarrow X \models \vee Y$; da X endlich ist, braucht man nur die schwache Vollständigkeit der Aussagenlogik; für ($\wedge$ L1) etwa zeigt man: $A, X \models \vee Y \Rightarrow A \wedge B, X \models \vee Y$.

4.1.3 Die Adäquatheit von S2

Das wichtigste metalogische Theorem dieses Kapitels ist der Hauptsatz von Gentzen (auch Schnitteliminationssatz genannt).

SATZ 1 (Abgeschlossenheit gegenüber der Schnittregel):
S2 und $S2^+$ sind äquivalent, oder anders formuliert:
die Schnittregel (CUT) ist zulässig in S2 (aber – natürlich – nicht direkt ableitbar).

Genauer formuliert werden wir sogar die folgende stärkere Behauptung auf syntaktischem Wege beweisen:

SATZ 2 (Hauptsatz von Gentzen, Schnitteliminationssatz):
Gegeben sei eine Herleitung H von $X \vdash Y$ in $S2^+$; dann gibt es eine effektives Verfahren, um eine Herleitung H* von $X \vdash Y$ in S2 anzugeben.

BEWEIS:
Zunächst betrachten wir eine neue Schlussregel, die sog. Mischregel; diese Regel hat einige technische Vorteile beim Beweis des Hauptsatzes; A^m stehe dabei für m Vorkommnisse von A, d.h. für A, A, ..., A (m-mal):

$$\frac{X \vdash Y, A^m \qquad A^n, Z \vdash U}{X, Z \vdash Y, U} \qquad \begin{array}{l}(m, n \geq 1)\\ \text{(MIX)}\end{array}$$

$$\frac{X \vdash Y, A^m \qquad A^n, X \vdash Y}{X \vdash Y} \qquad \begin{array}{l}(m, n \geq 1)\\ \text{(MIXa)}\end{array}$$

diese Regel heißt auch Multischnitt (Multicut); eine Anwendung dieser Regel heißt Mischung; A heißt Mischformel; die Formulierungen für (MIXb) oder (MIXc) sind analog wie vorher.

Behauptung 1:
$S2^+$ und S2 + (MIX) sind äquivalent und es folgt aus der Elimination der Mischungen für S2 + (MIX) die Elimination der Schnitte für $S2^+$.
Beweis:
(CUT) ist (MIX) für m = n = 1;
umgekehrt erhält man (MIX) durch (CUT) wie folgt:

$$\frac{\dfrac{X \vdash Y, A^m}{X \vdash Y, A} \qquad \dfrac{A^n, Z \vdash U}{A, Z \vdash U}}{X, Z \vdash Y, U} \qquad \begin{array}{l}\text{evtl. (KÜ L), (KÜ R)}\\ \text{(CUT)}\end{array}$$

Definition:
sei H eine Herleitung (einer Sequenz);
h(H) sei die Anzahl der in H vorkommenden Sequenzen;
die Höhe der Herleitung H sei die maximale Länge eines Astes dieser Herleitung und die Länge einer Astes einer Herleitung H die Anzahl der Knoten dieses Astes minus 1;
$X \vdash_n Y$ bedeute, daß $X \vdash Y$ eine Herleitung der Länge $\leq n$ habe.

Sei M eine Mischung mit A als Mischformel; der Rang vom M, r(M), sei g(A) +1 (wobei g(A) die Anzahl der in A vorkommenden logischen Zeichen ist).
Der Mischungsrang von H, mr(H), sei das Maximum derjenigen r(M), wo M in H vorkommt.

Behauptung 2:
Sei $g(A) = n$,
H eine Herleitung von $X \vdash Y, A^p$ mit $mr(H) \leq n$,
K eine Herleitung von $A^q, Z \vdash U$ mit $mr(K) \leq n$,
dann gibt es ein effektives Verfahren, um eine Herleitung G (=G(H, K)) von $X, Z \vdash Y, U$ anzugeben mit $mr(G) \leq n$.

d.h. die folgende Herleitung L:

$$\dfrac{\begin{array}{c}H\\ \dots\\ X \vdash Y, A^p\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{c}K\\ \dots\\ A^q, Z \vdash U\end{array}}{X, Z \vdash Y, U}\quad (\text{MIX}) \qquad mr(H) \text{ und } mr(K) \leq n$$

mit $r(\text{MIX}) = g(A) +1 = n+1$ und $mr(L)= n+1$

transformiert sich in eine Herleitung G:

$$\begin{array}{c}G\\ \dots\\ X, Z \vdash Y, U\end{array}$$

mit $mr(G) \leq n$.

Der Beweis dieser zentralen Behauptung wird nach Behauptung 3 geführt.

Behauptung 3:
Sei h eine Herleitung mit $mr(H) \leq n+1$; dann gibt es ein effektives Verfahren, um eine Herleitung R(H) der gleichen Endsequenz wie von H anzugeben mit $mr(R(H)) \leq n$.
Beweis:
Induktion nach der Anzahl m der Mischungen vom Grad n+1 in H:
m=0: R(H) = H;
m>0: sei folgende Mischung die oberste Mischung vom Grad n+1 in H, d.h. es sei L* der folgende Teilherleitungsbaum von H:

$$\dfrac{\begin{array}{c}H_1\\ \dots\\ X \vdash Y, A^p\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{c}K_1\\ \dots\\ A^q, Z \vdash U\end{array}}{X, Z \vdash Y, U}\quad (\text{MIX})$$

sodaß $mr(H_1) \leq n$, $mr(K_1) \leq n$;

nach Behauptung 2 gibt es ein effektives Verfahren, um eine Herleitung G von $X, Z \vdash Y, U$ anzugeben mit $mr(G) \leq n$; ersetzt man in H den Teilherleitungsbaum L* durch G, erhält man

eine Herleitung H‘ der gleichen Endsequenz wie H mit einer Mischung vom Grad n+1 weniger als H; nach Induktionsvoraussetzung ist R(H‘) definiert; setze R(H) = R(H‘).
Dies beweist den Schnitteliminationssatz, denn sei H eine Herleitung von $X \vdash Y$; da H endlich ist, gibt es ein n mit $mr(H) \leq n$; nun wendet man Behauptung 3 n+1 mal an.

Beweis von Behauptung 2:
durch Hauptinduktion nach g(A), und Nebeninduktion nach h(H) + h(K); insgesamt sind 37 (Unter-)Fälle zu betrachten, von denen wir allerdings nur einige ausgewählte Fälle behandeln, der Rest verbleibt als ÜBUNG; die Fälle werden danach unterschieden, welches die letzten Regelanwendungen in den Herleitungen H bzw. K waren:

$$\begin{array}{cc} H & K \\ \begin{array}{cc} H_1 & H_2 \\ \cdots & \cdots \end{array} & \begin{array}{cc} K_1 & K_2 \\ \cdots & \cdots \end{array} \end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{X_1 \vdash Y_1 \qquad X_2 \vdash Y_2}{X \vdash Y, A^m} \qquad \dfrac{Z_1 \vdash U_1 \qquad Z_2 \vdash U_2}{A^n, Z \vdash U}}{X, Z \vdash Y, U} \qquad \text{(MIX)}$$

Letzte Regel von H \ K	Axiom	Strukturregel	Mix	logische Regel (A nicht Hauptformel)	logische Regel (A Hauptformel)
Nummer des Falles:	2	4	6	8	9
Axiom, 1					
Strukturregel, 3					
Mix, 5					
logische Regel, 7 (A nicht Hauptformel)					
logische Regel, 9 (A Hauptformel)					

In den Fällen 1-8 wird die Nebeninduktionsvoraussetzung (Mischungen vom gleichen Rang wie A sind erlaubt, wenn die entsprechenden Herleitungen kürzer sind) angewendet (im Fall A = p oder A = ⊥ verschwinden dann alle Mischungen), und im Fall 9 wird die Hauptinduktionsvoraussetzung (Mischungen von niedrigerem Rang wie A sind erlaubt, ganz gleich wie lang die entsprechenden Herleitungen sind) angewendet.

Fall 1: die letzte Regel von H ist ein Axiom:
Unterfall 1.1: A = p, $p \vdash p$: die Herleitung:

$$\dfrac{p \vdash p \qquad \begin{array}{c} K \\ \cdots \\ p^n, Z \vdash U \end{array}}{p, Z \vdash U} \qquad \text{(MIX)}$$

transformiert sich in:

$$\dfrac{\begin{array}{c} K \\ \cdots \\ p^n, Z \vdash U \end{array}}{p, Z \vdash U} \qquad \text{(KÜ L)}$$

allgemeiner behandeln wir den Fall $A \in X$: die Herleitung:

$$\dfrac{\begin{array}{c}H\\ \dots\\ X \vdash Y, A^m\end{array} \qquad \begin{array}{c}K\\ \dots\\ A^n, Z \vdash U\end{array}}{X, Z \vdash Y, U}\quad \text{(MIX)}$$

transformiert sich in:

$$\dfrac{\begin{array}{c}K\\ \dots\\ A^n, Z \vdash U\end{array}}{X, Z \vdash Y, U}\quad \text{evtl. (KÜ L), (AB L), (AB R)}$$

Unterfall 1.2: $A = \perp$: $\perp \vdash \emptyset$ ist nicht möglich.

Fall 2: die letzte Regel von K ist ein Axiom:

Unterfall 2.1: $A = p$, $p \vdash p$: die Herleitung:

$$\dfrac{\begin{array}{c}H\\ \dots\\ X \vdash Y, p^m\end{array} \qquad p \vdash p}{X \vdash Y, p}$$

transformiert sich in:

$$\dfrac{\begin{array}{c}H\\ \dots\\ X \vdash Y, p^m\end{array}}{X \vdash Y, p}\quad \text{(KÜ R)}$$

Unterfall 2.2: $A = \perp$, $\perp \vdash \emptyset$: die Herleitung hat folgende Gestalt:

$$\dfrac{\begin{array}{c}H\\ \dots\\ X \vdash Y, \perp^m\end{array} \qquad \perp \vdash}{X \vdash Y}$$

nun zeigt man durch Herleitungsinduktion in S2 (ÜBUNG):

$X \vdash_n Y, \perp \Rightarrow X \vdash_n Y$

Fall 3: die letzte Regel R von H ist eine strukturelle Regel:

Unterfall 3.1 und 3.2: R = (AB L) oder (KÜ L): die Herleitung:

$$\dfrac{\begin{array}{c}H\\ \dots\\ \dfrac{X_0 \vdash Y, A^m}{X \vdash Y, A^m}\end{array} \qquad \begin{array}{c}K\\ \dots\\ \dots\\ A^n, Z \vdash U\end{array}}{X, Z \vdash Y, U}\quad \begin{array}{l}\text{(AB L) oder (KÜ L)}\\ \text{(MIX)}\end{array}$$

transformiert sich in:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}H\\ \dots\\ X_0 \vdash Y, A^m\end{array} \qquad \begin{array}{c}K\\ \dots\\ A^n, Z \vdash U\end{array}}{X_0, Z \vdash Y, U}}{X, Z \vdash Y, U}\quad \begin{array}{l}\text{(MIX)}\\ \text{(AB L) oder (KÜ L)}\end{array}$$

Unterfall 3.3: R = (AB R):

(i) die Abschwächungsregel wurde nicht auf A angewendet; die Herleitung:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}H\\ \dots\\ X \vdash Y_0, A^m\end{array}}{X \vdash Y, A^m}\ \text{(AB R)} \qquad \begin{array}{c}K\\ \dots\\ \dots\\ A^n, Z \vdash U\end{array}}{X, Z \vdash Y, U}\ \text{(MIX)}$$

transformiert sich in:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}H\\ \dots\\ X \vdash Y_0, A^m\end{array} \qquad \begin{array}{c}K\\ \dots\\ A^n, Z \vdash U\end{array}}{X, Z \vdash Y_0, U}\ \text{(MIX)}}{X, Z \vdash Y, U}\ \text{(AB R)}$$

(ii) die Abschwächungsregel wurde auf A angewendet und m≥2; die Herleitung:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}H\\ \dots\\ X \vdash Y, A^{m-1}\end{array}}{X \vdash Y, A^m}\ \text{(AB R), } m>1 \qquad \begin{array}{c}K\\ \dots\\ \dots\\ A^n, Z \vdash U\end{array}}{X, Z \vdash Y, U}\ \text{(MIX)}$$

transformiert sich in:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}H\\ \dots\\ X \vdash Y, A^{m-1}\end{array} \qquad \begin{array}{c}K\\ \dots\\ A^n, Z \vdash U\end{array}}{X, Z \vdash Y, U}\ \text{(MIX)}}{X, Z \vdash Y, U}\ \text{(AB R)}$$

(iii) die Abschwächungsregel wurde auf A angewendet und m=1; die Herleitung:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}H\\ \dots\\ X \vdash Y\end{array}}{X \vdash Y, A}\ \text{(AB R), } m>1 \qquad \begin{array}{c}K\\ \dots\\ \dots\\ A^n, Z \vdash U\end{array}}{X, Z \vdash Y, U}\ \text{(MIX)}$$

transformiert sich in:

$$\dfrac{\begin{array}{c}H\\ \dots\\ X \vdash Y\end{array}}{X, Z \vdash Y, U}\ \text{(AB L), (AB R)}$$

Unterfall 3.4: R = (KÜ R)

(i) die Kürzungsregel wurde nicht auf A angewendet; analog zu 3.2 (i) ÜBUNG

(ii) die Kürzungsregel wurde auf A angewendet; hier wird der technische Vorteil von (MIX) gegenüber (CUT) deutlich, da bei (CUT) die Verwendung der Induktionsvoraussetzung nicht zielführend wäre; die Herleitung:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}H\\ \dots\\ X \vdash Y, A^{m+1}\end{array}}{X \vdash Y, A^m}\ \text{(KÜ R)} \qquad \begin{array}{c}K\\ \dots\\ \dots\\ A^n, Z \vdash U\end{array}}{X, Z \vdash Y, U}\ \text{(MIX)}$$

transformiert sich in:

$$\dfrac{\begin{array}{c}H\\ \vdots\\ X \vdash Y, A^{m+1}\end{array} \qquad \begin{array}{c}K\\ \vdots\\ A^n, Z \vdash U\end{array}}{X, Z \vdash Y, U}\ \text{(MIX)}$$

Fall 4: die letzte Regel R von K ist eine strukturelle Regel: analog zu Fall 3
Unterfall 4.1: R = (AB L): ÜBUNG
Unterfall 4.2: R = (KÜ L): hier wird wieder der Vorteil von (MIX) gegenüber (CUT) deutlich; ÜBUNG
Unterfall 4.3: R = (AB R): ÜBUNG
Unterfall 4.4.: R = (KÜ R): ÜBUNG

Fall 5: die letzte Regel R von H ist die Mischregel:
die Herleitung:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}H_1\\ \vdots\\ X_1 \vdash Y_1, A^p, B^i\end{array} \qquad \begin{array}{c}H_2\\ \vdots\\ B^j, X_2 \vdash Y_2, A^q\end{array}}{X \vdash Y, A^m}\ \text{(MIX), } g(B) \le n \qquad \begin{array}{c}K\\ \vdots\\ \vdots\\ A^n, Z \vdash U\end{array}}{X, Z \vdash Y, U}\ \text{(MIX)}$$

transformiert sich im Falle p, q ≥ 1 in:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}H1\\ \vdots\\ X_1 \vdash Y_1, B^i, A^p\end{array} \qquad \begin{array}{c}K\\ \vdots\\ A^n, Z \vdash U\end{array}}{X_1, Z \vdash Y_1, U, B^i}\ \text{(MIX)} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}H2\\ \vdots\\ B^j, X_2 \vdash Y_2, A^q\end{array} \qquad \begin{array}{c}K\\ \vdots\\ A^n, Z \vdash U\end{array}}{B^j, X_2, Z \vdash Y_2, U}\ \text{(MIX)}}{X_1, X_2, Z, Z \vdash Y_1, Y_2, U, U}\ \text{(MIX)}}{X, Z \vdash Y, U}\ \text{(KÜ L), (KÜ R)}$$

im Falle p = 0 (q = 0 analog) transformiert sich die ursprüngliche Herleitung in:

$$\dfrac{\begin{array}{c}H1\\ \vdots\\ \vdots\\ X_1 \vdash Y_1, B^i\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}H2\\ \vdots\\ B^j, X_2 \vdash Y_2, A^q\end{array} \qquad \begin{array}{c}K\\ \vdots\\ A^n, Z \vdash U\end{array}}{B^j, X_2, Z \vdash Y_2, U}\ \text{(MIX)}}{X_1, X_2, Z \vdash Y_1, Y_2, U}\ \text{(MIX)}$$

Fall 6: die letzte Regel R von K ist die Mischregel: analog zu Fall 5, ÜBUNG

Fall 7: die letzte Regel von H ist eine logische Regel, bei der A nicht die Hauptformel ist:
Unterfall 7.1: R = (∧ L1): die Herleitung:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}H\\ \vdots\\ C, X_0 \vdash Y, A^m\end{array}}{C \wedge D, X_0 \vdash Y, A^m}\ (\wedge\text{ L1}) \qquad \begin{array}{c}K\\ \vdots\\ \vdots\\ A^n, Z \vdash U\end{array}}{X, Z \vdash Y, U}\ \text{(MIX)}$$

transformiert sich in:

H K
... ...
$\underline{C, X_0 \vdash Y, A^m \qquad A^n, Z \vdash U}$
$\underline{C, X_0, Z \vdash Y, U}$ (MIX)
$C \wedge D, X_0 \vdash Y, U$ ($\wedge$ L1)

Unterfall 7.2: R = ($\wedge$ L2): ÜBUNG
Unterfall 7.3: R = ($\vee$ L): ÜBUNG
Unterfall 7.4: R = ($\rightarrow$ L): ÜBUNG
Unterfall 7.5: R = ($\neg$ L): ÜBUNG
Unterfall 7.6: R = ($\wedge$ R): die Herleitung:

H_1 H_2 K
... ...
$\underline{X_1 \vdash Y_1, A^p, C \qquad X_2 \vdash Y_2, A^q, D}$ ...
$\underline{X \vdash Y_0, A^m, C \wedge D \qquad A^n, Z \vdash U}$ ($\wedge$ R)
$X, Z \vdash Y, U$ (MIX)

transformiert sich im Falle p, q ≥ 1 (p=0 oder q=0 analog) in:

H_1 K H_2 K
... ...
$\underline{X_1 \vdash Y_1, C, A^p \qquad A^n, Z \vdash U}$ $\underline{X_2 \vdash Y_2, D, A^q \qquad A^n, Z \vdash U}$
$\underline{X_1, Z \vdash Y_1, U, C \qquad X_2, Z \vdash Y_2, U, D}$ (MIX)
$\underline{X, Z, Z \vdash Y_0, U, U, C \wedge D}$ ($\wedge$ R)
$X, Z \vdash Y, U$ (KÜ L), (KÜ R)

Unterfall 7.7: R = ($\vee$ R1): ÜBUNG
Unterfall 7.8: R = ($\vee$ R2): ÜBUNG
Unterfall 7.9: R = ($\rightarrow$ R): ÜBUNG
Unterfall 7.10: R = ($\neg$ R): ÜBUNG

Fall 8: die letzte Regel von K ist eine logische Regel, bei der A nicht die Hauptformel ist:
Unterfall 8.1: R = ($\wedge$ L1): ÜBUNG
Unterfall 8.2: R = ($\wedge$ L2): ÜBUNG
Unterfall 8.3: R = ($\vee$ L): ÜBUNG
Unterfall 8.4: R = ($\rightarrow$ L): die Herleitung:

H K_1 K_2
... ...
... $\underline{A^p, Z_1 \vdash U_1, C \qquad D, A^q, Z_2 \vdash U_2}$
$\underline{X \vdash Y, A^m \qquad A^n, C \rightarrow D, Z_0 \vdash U}$ ($\rightarrow$ L)
$X, Z \vdash Y, U$ (MIX)

transformiert sich im Falle p, q ≥ 1 (p=0 oder q=0 analog) in:

H K_1 H K_2
... ...
$\underline{X \vdash Y, A^m \qquad A^p, Z_1 \vdash U_1, C}$ $\underline{X \vdash Y, A^m \qquad D, A^q, Z_2 \vdash U_2}$
$\underline{X, Z_1 \vdash Y, U_1, C \qquad D, X, Z_2 \vdash Y, U_2}$ (MIX)
$\underline{C \rightarrow D, X, X, Z_0 \vdash Y, Y, U}$ ($\rightarrow$ L)
$X, Z \vdash Y, U$ (KÜ L), (KÜ R)

Unterfall 8.5: R = (¬ L): die Herleitung:

$$\begin{array}{lll}
H & K & \\
\ldots & \ldots & \\
\ldots & \underline{A^n, Z_0 \vdash U, C} & \\
\underline{X \vdash Y, A^m} & \underline{\neg C, A^n Z_0 \vdash U} & (\neg\ L) \\
\quad X, Z \vdash Y, U & & (MIX)
\end{array}$$

transformiert sich in:

$$\begin{array}{lll}
H & K & \\
\ldots & \ldots & \\
\underline{X \vdash Y, A^m} & \underline{A^n, Z_0 \vdash U, C} & \\
\quad \underline{X, Z_0 \vdash Y, U, C} & & (MIX) \\
\quad \neg C, X, Z_0 \vdash Y, U & & (\neg\ L)
\end{array}$$

Unterfall 8.6: R = (∧ R): ÜBUNG
Unterfall 8.7: R = (∨ R1): ÜBUNG
Unterfall 8.8: R = (∨ R2): ÜBUNG
Unterfall 8.9: R = (→ R): ÜBUNG
Unterfall 8.10: R = (¬ R): ÜBUNG

Fall 9: die letzten Regeln von H und K sind beide logische Regeln, bei denen A die Hauptformel ist: dann muß die letzte Regel von H eine rechte logische Regel und die letzte Regel von K eine linke logische Regel sein, die beide zum gleichen logischen Zeichen gehören.

Unterfall 9.1: A = ¬B, d.h. die entsprechenden Regeln sind (¬ R) und (¬ L): die Herleitung:

$$\begin{array}{lll}
H & K & \\
\ldots & \ldots & \\
\underline{B, X \vdash Y, \neg B^m} & \underline{\neg B^n, Z \vdash U, B} & \\
\underline{X \vdash Y, \neg B^{m+1}} & \underline{\neg B^{n+1}, Z \vdash U} & (\neg\ R), (\neg\ L) \\
\quad X, Z \vdash Y, U & & (MIX)
\end{array}$$

transformiert sich im Falle m, n ≥ 1 (m=0 oder n=0 analog) in:

$$\begin{array}{lllll}
H & K & H & K & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
\underline{B, X \vdash Y, \neg B^m} & \ldots & \ldots & \underline{\neg B^n, Z \vdash U, B} & \\
\underline{X \vdash Y, \neg B^{m+1}} & \underline{\neg B^n, Z \vdash U, B} & \underline{B, X \vdash Y, \neg B^m} & \underline{\neg B^{n+1}, Z \vdash U} & \\
\quad \underline{X, Z \vdash Y, U, B} & & \quad \underline{B, X, Z \vdash Y, U} & & (MIX) \\
 & \underline{X, X, Z, Z \vdash Y, Y, U, U} & & & (MIX) \\
 & \quad X, Z \vdash Y, U & & & (KÜ\ L), (KÜ\ R)
\end{array}$$

Unterfall 9.2: A = (B∧C), d.h. die entsprechenden Regeln sind (∧ R) und (∧ L1); für (∧ L2) analog: die Herleitung:

$$\begin{array}{llll}
\quad H & & & \\
H_1 & H_2 & K & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \\
\underline{X_1 \vdash Y_1, (B\wedge C)^m, B} & \underline{X_2 \vdash Y_2, (B\wedge C)^m, C} & \underline{(B\wedge C)^n, B, Z \vdash U} & \\
\quad \underline{X \vdash Y, (B\wedge C)^{m+1}} & & \underline{(B\wedge C)^{n+1}, Z, U} & (\wedge\ R), (\wedge L1) \\
 & \quad X, Z \vdash Y, U & & (MIX)
\end{array}$$

transformiert sich im Falle m, n ≥ 1 (m=0 oder n=0 analog) in:

$$
\begin{array}{llll}
H_1 & K & H & K \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \underline{(B\wedge C)^n, B, Z \vdash U} & \ldots & \ldots \\
\underline{X_1 \vdash Y_1, (B\wedge C)^m, B} & \underline{(B\wedge C)^{n+1}, Z \vdash U} & \underline{X \vdash Y, (B\wedge C)^{m+1}} & \underline{(B\wedge C)^n, B, Z \vdash U} \\
\multicolumn{2}{c}{\underline{X_1, Z \vdash Y_1, U, B}} & \multicolumn{2}{c}{\underline{B, X, Z \vdash Y, U}} & (MIX) \\
\multicolumn{4}{c}{\underline{X_1, X, Z, Z \vdash Y_1, Y, U, U}} & (MIX) \\
\multicolumn{4}{c}{X, Z \vdash Y, U} & (KÜ\ L), (KÜ\ R)
\end{array}
$$

9.3: A = $(B\vee C)$, d.h. die entsprechenden Regeln sind ($\vee$ R1) und ($\vee$ L); für ($\vee$ R2) analog: die Herleitung:

$$
\begin{array}{llll}
H & & K & \\
\ldots & K_c & & K_2 \\
\ldots & \ldots & & \ldots \\
\underline{X \vdash Y, (B\vee C)^m, B} & \multicolumn{3}{l}{\underline{B, (B\vee C)^n, Z_1 \vdash U_1 \qquad C, (B\vee C)^n, Z_2 \vdash U_2}} \\
\underline{X \vdash Y, (B\vee C)^{m+1}} & & \underline{(B\vee C)^{n+1}, Z \vdash U} & & (\vee\ R1), (\vee\ L) \\
\multicolumn{4}{c}{X, Z \vdash Y, U} &
\end{array}
$$

transformiert sich im Falle m, n ≥ 1 (m=0 oder n=0 analog) in:

$$
\begin{array}{llll}
H & K & H & K_1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \underline{X \vdash Y, (B\vee C)^m, B} & \\
\underline{X \vdash Y, (B\vee C)^m, B} & \underline{(B\vee C)^{n+1}, Z \vdash U} & \underline{X \vdash Y, (B\vee C)^{m+1}} & \underline{B, (B\vee C)^n, Z_1 \vdash U_1} \\
\multicolumn{2}{c}{\underline{X, Z \vdash Y, U, B}} & \multicolumn{2}{c}{\underline{B, X, Z_1 \vdash Y, U_1}} & (MIX) \\
\multicolumn{4}{c}{\underline{X, X, Z_1, Z \vdash Y, Y, U_1, U}} & (MIX) \\
\multicolumn{4}{c}{X, Z \vdash Y, U} & (KÜ\ L), (KÜ\ R)
\end{array}
$$

9.4: A = $(B\rightarrow C)$, d.h. die entsprechenden Regeln sind ($\rightarrow$ R) und ($\rightarrow$ L): die Herleitung:

$$
\begin{array}{llll}
H & & K & \\
\ldots & K_1 & & K_2 \\
\ldots & \ldots & & \ldots \\
\underline{B, X \vdash Y, (B\rightarrow C)^m, C} & \multicolumn{3}{l}{\underline{(B\rightarrow C)^n, Z_1 \vdash U_1, B \qquad C, (B\rightarrow C)^n, Z_2 \vdash U_2}} \\
\underline{X \vdash Y, (B\rightarrow C)^{m+1}} & & \underline{(B\rightarrow C)^{n+1}, Z \vdash U} & & (\rightarrow R), (\rightarrow L) \\
\multicolumn{4}{c}{X, Z \vdash Y, U} & (MIX)
\end{array}
$$

transformiert sich in:

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{c}{G_1} \\
H & K_1 \\
\ldots & \ldots \\
\underline{B, X \vdash Y, (B\rightarrow C)^m, C} & \ldots \\
\underline{X \vdash Y, (B\rightarrow C)^{m+1}} & \underline{(B\rightarrow C)^n, Z_1 \vdash U_1, B} \\
\multicolumn{2}{c}{X, Z_1 \vdash Y, U_1, B} & (MIX)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{c}{G_2} \\
H & K \\
\ldots & \ldots \\
\underline{B, X \vdash Y, (B\rightarrow C)^m, C} & \underline{(B\rightarrow C)^{n+1}, Z \vdash U} \\
\multicolumn{2}{c}{B, X, Z \vdash Y, U, C} & (MIX)
\end{array}
$$

G_3

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} H \\ \ldots \\ B, X \vdash Y, (B\to C)^m, C \end{matrix}}{X \vdash Y, (B\to C)^{m+1}} \qquad \begin{matrix} K_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ C, (B\to C)^n, Z_2 \vdash U_2 \end{matrix}}{C, X, Z_2 \vdash Y, U_2} \quad \text{(MIX)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} G_1 \\ \ldots \\ X, Z_1 \vdash Y, U_1, B \end{matrix} \qquad \begin{matrix} G_2 \\ \ldots \\ B, X, Z \vdash Y, U, C \end{matrix}}{X, X, Z_1, Z \vdash Y, Y, U_1, U, C} \text{(MIX)} \qquad \begin{matrix} G_3 \\ \ldots \\ \ldots \\ C, X, Z_2 \vdash Y, U_2 \end{matrix}}{X, X, X, Z_1, Z_2, Z \vdash Y, Y, Y, U_1, U_2, U} \text{(MIX)}}{X, Z \vdash Y, U} \quad \text{(KÜ L), (KÜ R)}$$

FOLGERUNG (Adäquatheit von S2):
S2 ist adäquat bzgl. AL

FOLGERUNG (Satz über die Teilformeleigenschaft für S2):
Ist H eine - schnittfreie - Herleitung der Sequenz $X \vdash Y$ in S2, so sind alle in H vorkommenden Formeln Teilformeln von Formeln in X, Y.

BEWEIS:
Folgt sofort aus der Beschaffenheit der Regeln von S2; diese Eigenschaft würde verloren gehen, wenn man die Schnittregel zum Kalkül hinzunimmt.

FOLGERUNG (Separierungseigenschaft für S2):
Ist $X \vdash Y$ in S2 herleitbar, so gibt es eine Herleitung H von $X \vdash Y$, in der nur diejenigen Axiome und Schlussregeln angewendet werden, wo die entsprechenden Junktoren in $X \vdash Y$ vorkommen.

FOLGERUNG (Beschränkung der Formelvorkommnisse für Herleitungen in S2):
Ist $X \vdash Y$ in S2 herleitbar, so gibt es eine Herleitung H von $X \vdash Y$, sodaß für alle in H auftretenden Sequenzen $Z \vdash U$ gilt: jede Formel A in Z bzw. U kommt höchstens dreimal in Z bzw. U vor.

BEWEIS:
Die Aussage „höchstens dreimal“ kann sogar verschärft werden zu „höchstens zweimal“; siehe Troelstra/Schwichtenberg (1996, 89).

FOLGERUNG (Entscheidbarkeit der Aussagenlogik):
Die Aussagenlogik ist entscheidbar

BEWEIS:
Aus der Beschränkung der Formelvorkommnisse für Herleitungen in S2 folgt weiters, daß jede Sequenz $X \vdash Y$ die Information über ihre eigene Herleitung in S2 enthält; denn es gibt ein effektives Verfahren, um von jeder Sequenz $X \vdash Y$ eine Herleitung von $X \vdash Y$ in S2 anzugeben: man verfolgt den zu suchenden Beweis von der herzuleitenden Sequenz zurück (wie bei der Tableaumethode), indem man alle möglichen Regelanwendungen durchprobiert;

die zu suchenden Formeln werden dabei schrittweise in ihrer Komplexität abgebaut und die Kürzungsregeln werden dabei höchstens dreimal (bzw. zweimal) angewendet !!

LEMMA 8:
Sei Sx ein Sequenzenkalkül und Sx äquivalent zu S2; dann gilt:
Sx ist äquivalent zu Sx + (CUT).

BEWEIS:
Induktion nach der Anzahl m der in einer Herleitung in Sx vorkommenden Anwendungen der Schnittregel (CUT):
sei H eine Herleitung in Sx von X, Z $\vdash$ Y, U, sodaß oberhalb von (CUT) keine Anwendung der Schnittregel vorkommt:

H

H_1 H_2 Herleitungen in Sx ohne (CUT)

... ...

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad A, Z \vdash U}{X, Z \vdash Y, U} \quad \text{(CUT)}$$

dann gibt es Herleitungen von X $\vdash$ Y, A und A, Z $\vdash$ U in S2, also ist auch X, Z $\vdash$ Y, U in S2 herleitbar, also ist X, Z $\vdash$ Y, U in Sx herleitbar ohne (CUT).

LEMMA 9:
Sei Sx ein Sequenzenkalkül und Sx äquivalent zu Sx + (CUT); dann gilt:
Sx ist äquivalent zu Sx + (CUTy) (y = a, b, c).

BEWEIS:
Es ist Sx + (CUT) nach Lemma 1 äquivalent zu Sx + (CUTy) (y = a, b, c); der Beweis der Behauptung erfolgt wie oben durch Induktion nach der Anzahl m der in einer Herleitung in Sx + (CUTy) vorkommenden Anwendungen der Schnittregel (CUTy):
sei H eine Herleitung in Sx + (CUTy) von X, Z $\vdash$ Y, U, sodaß oberhalb von (CUTy) keine Anwendung dieser Schnittregel vorkommt:

H

H_1 H_2 Herleitungen in Sx + (CUTy) ohne (CUTy)

... ...

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad A, Z \vdash U}{X, Z \vdash Y, U} \quad \begin{array}{l}\text{(mit geeigneter Formulierung dieser Sequenzen)}\\ \text{(CUTy)}\end{array}$$

dann gibt es Herleitungen von X $\vdash$ Y, A und A, Z $\vdash$ U in Sx + (CUT), also ist X, Z $\vdash$ Y, U in Sx + (CUT) herleitbar, daher auch in Sx (ohne (CUT)) und daher auch in Sx ohne (CUTy).

4.1.4 Weitere Varianten von Sequenzenkalkülen

Wie schon erwähnt, gibt es in der Literatur viele verschiedene Varianten von Sequenzenkalkülen. Im folgenden soll versucht werden, zumindest einen Teil davon zu klassifizieren und anzugeben.
Wie anhand der Variante S2 schon teilweise ersichtlich wurde, können als Desiderata für die einzelnen Varianten S folgende Punkte angeführt werden:
Adäquatheit von S + (CUT)
Schnittelimination in S + (CUT) und damit Adäquatheit von S
Weitere wünschenswerte Eigenschaften wären etwa:
Man erhält aus S (leicht) ein Fragment für die minimale und intuitionistische Logik
Man kann S (leicht) zur Prädikatenlogik (oder Modallogik) erweitern.

Einzelne Varianten von Sequenzenkalkülen können sich in folgenden Punkten voneinander unterscheiden:

(i) hinsichtlich der verwendeten Signatur:
alle hier angegebenen Varianten werden in der Signatur $\{\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ formuliert, wobei wir beispielsweise für S2 angeben, wie die entsprechenden Formulierungen für die Signaturen $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ oder $\{\perp, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ auszusehen hätten; dies geschieht im allgemeinen einfach durch Streichung derjenigen Regeln, wo der entsprechende Junktor (der dann definiert wird) nicht in der Junktorenbasis vorkommt; die gestrichenen Regeln werden dann zulässig.

(ii) hinsichtlich des Begriffes der Sequenz (‚Sequenz', ‚KÜ', ‚VE'):
Definierbar mit jeweils endlichen Folgen (dann braucht man Kürzungs- und Vertauschungsregeln), Multimengen (mit Kürzungs-, aber ohne Vertauschungsregeln), oder Mengen (ohne Kürzungs- und Vertauschungsregeln) von Formeln; man könnte auch noch unendliche (Multi-)Mengen betrachten, was wir hier allerdings nicht tun werden. Wir betrachten hier auch nur zwei Folgenvarianten (S1 und S1a), da sie sich von den Multimengenvarianten ausschliesslich durch die Verwendung der Vertauschungsregeln unterscheiden.

(iii) hinsichtlich der zweiprämissigen Regeln (‚Kontext'):
die Prämissen der Regeln können verschiedenen Kontext haben (Regel R), sie müssen gleichen Kontext haben (Regel Ra), sie müssen gleichen Kontext im Antezedens haben (Regel Rb) oder sie müssen gleichen Kontext im Sukzedens haben (Regel Rc); wir betrachten hier nur Varianten S mit Regeln R oder Varianten Sa mit Regeln Ra.

(iv) hinsichtlich der einprämissigen Regeln (‚$\wedge$L', ‚$\vee$R'):
man kann zwei linke $\wedge$-Regeln oder nur eine linke $\wedge$-Regel haben; genauso bei der rechten $\vee$-Regel. Man könnte auch mit mehreren Formeln gleichzeitig abschwächen, was wir hier allerdings nicht tun werden.

(v) hinsichtlich der verwendeten Axiome (‚AB'):
Man kann als Axiome annehmen: $p \vdash p$ oder $A \vdash A$ (mit Abschwächungsregeln), $X, p \vdash p, Y$ oder $X, A \vdash A, Y$ (ohne Abschwächungsregeln); hat man das Falsum in der Signatur: $\perp \vdash$ (mit Abschwächungsregeln) oder $X, \perp \vdash Y$ (ohne Abschwächungsregeln). Weiters könnte man noch betrachten: Axiome $X, p \vdash p$ oder $X, A \vdash A$ und (AB R); Axiome $p \vdash p, Y$ oder

A ├ A, Y und (AB L), wir hier allerdings nicht tun werden. Bei den Mengenvarianten betrachten wir nur mehr solche, wo die Abschwächungsregeln explizit vorkommen.

(vi) hinsichtlich der verwendeten Schnittregel (‚S^+ ‘):
Die Variante S (ohne Schnittregel) kann zu einer Variante S^+ erweitert werden mit der Schnittregel (CUT), (CUTa), (CUTb) oder (CUTc); wir betrachten hier nur Erweiterungen mit (CUT) bzw. (CUTa).

Aus den möglichen Kombinationen der obigen Alternativen wurden die folgenden ausgewählt:

ÜBERSICHT (über Varianten von Sequenzenkalkülen):

Name	Sequenz	Kontext	$\wedge$L	$\vee$R	AB	KÜ	VE	S^+ = S +	adäquat
S1	Folgen	verschieden	2	2	ja	ja	ja	(CUT)	ja
S1a	Folgen	gleich	2	2	ja	ja	ja	(CUTa)	ja
S2	Multimenge	verschieden	2	2	ja	ja		(CUT)	ja
S2a	Multimenge	gleich	2	2	ja	ja		(CUTa)	ja
S3	Multimenge	verschieden	2	2		ja		(CUT)	ja
S3a	Multimenge	gleich	2	2		ja		(CUTa)	ja
S4	Multimenge	verschieden	1	1				(CUT)	nein
S4a	Multimenge	gleich	1	1				(CUTa)	ja
S5	Multimenge	verschieden	1	1	ja			(CUT)	nein
S5a	Multimenge	gleich	1	1	ja			(CUTa)	ja
S6	Multimenge	verschieden	2	2	ja			(CUT)	nein
S6a	Multimenge	gleich	2	2	ja			(CUTa)	ja
S7	Multimenge	verschieden	1	1	ja	ja		(CUT)	ja
S7a	Multimenge	gleich	1	1	ja	ja		(CUTa)	ja
$\mathcal{S}_{\mathrm{MM}}$	Multimenge								ja
S8	Menge	verschieden	1	1	ja			(CUT)	
S8a	Menge	gleich	1	1	ja			(CUTa)	
S9	Menge	verschieden	2	2	ja			(CUT)	
S9a	Menge	gleich	2	2	ja			(CUTa)	
$\mathcal{S}_{\mathrm{M}}$	Menge								ja
S10	Menge	verschieden	X	X	ja				ja
S10a	Menge	gleich	X	X	ja				ja

BEMERKUNG:
Die Namen der Varianten der einzelnen Sequenzenkalküle werden mit S und einer Ziffernfolge bezeichnet; Verwechslungen mit Systemen der Modallogik sind zu vermeiden.

BEMERKUNG:
Die Varianten S_{MM} bzw. S_{M} sind Varianten, die alle Regeln aus 4.1.1 enthalten; die Varianten 10 und 10a enthalten teilweise ganz neue Regeln und werden deshalb gesondert behandelt.

In den folgenden Abschnitten werden die einzelnen Varianten definiert und für alle visuellen Lesertypen nochmals mit allen Axiomen und Regeln auf einer eigenen Seite präsentiert.
Die Korrektheit aller Varianten ist klar.
Das Schwergewicht liegt auf den Varianten S2 (bzw. S2a) und S4a; für S2 und S2a werden die Lemmata 3-6 im Detail bewiesen; für S4a wird die Äquivalenz mit S2 gezeigt und weitere Eigenschaften wie Interpolation.
Für alle übrigen Varianten gilt: entweder sind sie unvollständig, oder sie sind äquivalent mit S2, woraus - ebenso wie für S4a - die Schnittelimination und alle Konsequenzen daraus folgen.

4.1.5 Die Varianten S1 und S1a

DEFINITION (S1):
Sind X und Y endliche Folgen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz.
S1 sei folgender Kalkül:
Axiome: (Ax), ($\bot$ L)
Linke logische Regeln: ($\wedge$ L1), ($\wedge$ L2), ($\vee$ L), ($\rightarrow$ L), ($\neg$ L)
Rechte logische Regeln: ($\wedge$ R), ($\vee$ R1), ($\vee$ R2), ($\rightarrow$ R), ($\neg$ R)
Linke Strukturschlussregeln: (AB L), (KÜ L), (VE L)
Rechte Strukturschlussregeln: (AB R), (KÜ R), (VE R)

BEMERKUNG:
S1 wird verwendet von: Girard (1987), in der Signatur $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ mit (Ax*) anstelle von (Ax); ebenso von Heindorf (1994).

DEFINITION (S1a):
Sind X und Y endliche Folgen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz.
S1a sei folgender Kalkül:
Axiome: (Ax), ($\bot$ L)
Linke logische Regeln: ($\wedge$ L1), ($\wedge$ L2), ($\vee$ La), ($\rightarrow$ La), ($\neg$ L)
Rechte logische Regeln: ($\wedge$ Ra), ($\vee$ R1), ($\vee$ R2), ($\rightarrow$ R), ($\neg$ R)
Linke Strukturschlussregeln: (AB L), (KÜ L), (VE L)
Rechte Strukturschlussregeln: (AB R), (KÜ R), (VE R)

BEMERKUNG:
S1a wird verwendet von: Bibel / Eder (1993), in der Signatur $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ mit (Ax*) und ($\rightarrow$ L) anstelle von ($\rightarrow$ La); dies entspricht Gentzens (1934/35) originalem Kalkül LK; verwendet auch von Takeuti (1987).

Da eine Multimenge eine Folge ist, bei der es auf die Reihenfolge der Folgenglieder nicht ankommt, gilt, daß Herleitungen in S1 bzw. S1a identisch sind mit Herleitungen in S2 bzw. S2a bis auf zusätzliche Anwendungen von (VE L) und (VE R).
Daher sind S1 und S2 bzw. S1a und S2a äquivalent und es gelten alle Aussagen über S2 auch für S1 und S1a.

Aus diesen Gründen betrachten wir im folgenden nur mehr Varianten in der Formulierung von Multimengen bzw. Mengen.

Beispiel einer Herleitung in S1:

$$\begin{array}{ll}
\underline{p \vdash p \qquad\qquad q \vdash q} & \text{(Ax)} \\
\underline{p\rightarrow q,\ p \vdash q} & (\rightarrow \text{L}) \\
p,\ p\rightarrow q \vdash q & \text{(VE L)}
\end{array}$$

Variante S1:

Sind X und Y endliche Folgen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz

Axiome:

$p \vdash p$ (Ax)

$\bot \vdash$ ($\bot$ L)

Schlussregeln:

Logische Regeln:

$$\frac{A, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y} \quad (\wedge\ \text{L1}) \qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad Z \vdash U, B}{X, Z \vdash Y, U, A \wedge B} \quad (\wedge\ \text{R})$$

$$\frac{B, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y} \quad (\wedge\ \text{L2})$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, Z \vdash U}{A \vee B, X, Z \vdash Y, U} \quad (\vee\ \text{L}) \qquad \frac{X \vdash Y, A}{X \vdash Y, A \vee B} \quad (\vee\ \text{R1})$$

$$\frac{X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \vee B} \quad (\vee\ \text{R2})$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, Z \vdash U}{A \to B, X, Z \vdash Y, U} \quad (\to \text{L}) \qquad \frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \to B} \quad (\to \text{R})$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y} \quad (\neg\ \text{L}) \qquad \frac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A} \quad (\neg\ \text{R})$$

Strukturschlussregeln:

$$\frac{X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \quad (\text{AB L}) \qquad \frac{X \vdash Y}{X \vdash Y, A} \quad (\text{AB R})$$

$$\frac{A, A, X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \quad (\text{KÜ L}) \qquad \frac{X \vdash Y, A, A}{X \vdash Y, A} \quad (\text{KÜ R})$$

$$\frac{X, A, B, Z \vdash Y}{X, B, A, Z \vdash Y} \quad (\text{VE L}) \qquad \frac{X \vdash Y, A, B, U}{X \vdash Y, B, A, U} \quad (\text{VE R})$$

Variante S1a:

Sind X und Y endliche Folgen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz

Axiome:

$p \vdash p$ (Ax)

$\bot \vdash$ ($\bot$ L)

Schlussregeln:

Logische Regeln:

$$\frac{A, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y} \quad (\wedge\ L1) \qquad\qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \wedge B} \quad (\wedge\ Ra)$$

$$\frac{B, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y} \quad (\wedge\ L2)$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, X \vdash Y}{A \vee B, X \vdash Y} \quad (\vee\ La) \qquad\qquad \frac{X \vdash Y, A}{X \vdash Y, A \vee B} \quad (\vee\ R1)$$

$$\frac{X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \vee B} \quad (\vee\ R2)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, X \vdash Y}{A \to B, X \vdash Y} \quad (\to La) \qquad\qquad \frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \to B} \quad (\to R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y} \quad (\neg\ L) \qquad\qquad \frac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A} \quad (\neg\ R)$$

Strukturschlussregeln:

$$\frac{X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \quad (AB\ L) \qquad\qquad \frac{X \vdash Y}{X \vdash Y, A} \quad (AB\ R)$$

$$\frac{A, A, X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \quad (KÜ\ L) \qquad\qquad \frac{X \vdash Y, A, A}{X \vdash Y, A} \quad (KÜ\ R)$$

$$\frac{X, A, B, Z \vdash Y}{X, B, A, Z \vdash Y} \quad (VE\ L) \qquad\qquad \frac{X \vdash Y, A, B, U}{X \vdash Y, B, A, U} \quad (VE\ R)$$

4.1.6 Die Varianten S2 und S2a

DEFINITION (S2, $S2^+$):
Sind X und Y endliche Multimengen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz
S2 sei folgender Kalkül:
Axiome: (Ax), ($\bot$ L)
Linke logische Regeln: ($\wedge$ L1), ($\wedge$ L2), ($\vee$ L), ($\rightarrow$ L), ($\neg$ L)
Rechte logische Regeln: ($\wedge$ R), ($\vee$ R1), ($\vee$ R2), ($\rightarrow$ R), ($\neg$ R)
Linke Strukturschlussregeln: (AB L), (KÜ L)
Rechte Strukturschlussregeln: (AB R), (KÜ R)
$S2^+$ = S2 + (CUT)

BEMERKUNG (zur intuitionistischen Logik):
Die intuitionistische Variante S2i von S2 (analog für S2a) entsteht durch Beschränkung der zugelassenen Sequenzen: eine intuitionistische Sequenz ist eine Sequenz, deren Sukzedens höchstens eine Formel enthält (also $X \vdash A$ oder $X \vdash \emptyset$). Eine Herleitung im intuitionistischen Kalkül ist eine Herleitung im klassischen Kalkül, in der nur intuitionistische Sequenzen vorkommen. Die Regel (KÜ R) fällt somit weg und (AB R) ist nur in folgender Form möglich:

$$\frac{X \vdash \emptyset}{X \vdash A} \quad \text{(AB Ri)}$$

zusätzlich sind ($\vee$ L), ($\rightarrow$ L) und (CUT) für den intuitionistischen Kalkül folgendermaßen zu modifizieren:

$$\frac{A, X \vdash C \qquad B, Z \vdash C}{A\vee B, X, Z \vdash C} \quad (\vee \text{ Li})$$

$$\frac{X \vdash A \qquad B, Z \vdash C}{A\rightarrow B, X, Z \vdash C} \quad (\rightarrow \text{ Li})$$

$$\frac{X \vdash A \qquad A, Z \vdash B}{X, Z \vdash B} \quad \text{(CUTi)}$$

BEMERKUNG (zur minimalen Logik):
Die minimale Variante S2m entsteht aus S2i durch Weglassen von ($\bot$ L).

DEFINITION (S2a, $S2a^+$):
Sind X und Y endliche Multimengen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz
S2a sei folgender Kalkül:
Axiome: (Ax), ($\bot$ L)
Linke logische Regeln: ($\wedge$ L1), ($\wedge$ L2), ($\vee$a L), ($\rightarrow$ La), ($\neg$ L)
Rechte logische Regeln: ($\wedge$ Ra), ($\vee$ R1), ($\vee$ R2), ($\rightarrow$ R), ($\neg$ R)
Linke Strukturschlussregeln: (AB L), (KÜ L)
Rechte Strukturschlussregeln: (AB R), (KÜ R)
$S2a^+$ = S2a + (CUTa)

BEMERKUNG:
Herleitungen, die nur einprämissige Regeln verwenden, sind identisch in S2 und S2a.
Aus Lemma 1 folgt: bei Zulässigkeit von (KÜ) und (AB) sind stets Varianten, wo die zweiprämissigen Regeln gleichen Kontext haben müssen, äquivalent denjenigen Varianten, wo die zweiprämissigen Regeln verschiedenen Kontext haben können, d.h. insb.: S2 und S2a sind äquivalent.

BEWEIS von LEMMA 3 für S2:
wir zeigen: $A \vdash A$ ist herleitbar in S2

Induktion nach g(A):
Induktionsanfang, g(A)=0:

$p \vdash p$	(Ax)
$\underline{\bot \vdash \varnothing}$	($\bot$ L)
$\bot \vdash \bot$	(AB R)

Induktionsschritt, g(A) > 0:
A:= ¬B: nach Induktionsvoraussetzung ist $B \vdash B$ herleitbar:

$\underline{B \vdash B}$	IV
$\underline{\neg B, B \vdash}$	($\neg$ L)
$\neg B \vdash \neg B$	($\neg$ R)

A:=B∧C: nach Induktionsvoraussetzung sind $B \vdash B$ und $C \vdash C$ herleitbar:

$\underline{B \vdash B}$	$\underline{C \vdash C}$	
$\underline{B \land C \vdash B}$	$\underline{B \land C \vdash C}$	($\land$ L1), ($\land$ L2)
$\underline{B \land C, B \land C \vdash B \land C}$		($\land$ R)
$B \land C \vdash B \land C$		(KÜ L)

A:=B∨C: nach Induktionsvoraussetzung sind $B \vdash B$ und $C \vdash C$ herleitbar:

$\underline{B \vdash B}$	$\underline{C \vdash C}$	
$\underline{B \vdash B \lor C}$	$\underline{C \vdash B \lor C}$	($\lor$ R1), ($\lor$ R2)
$\underline{B \lor C \vdash B \lor C, B \lor C}$		($\lor$ L)
$B \lor C \vdash B \lor C$		(KÜ R)

A:=B→C: nach Induktionsvoraussetzung sind $B \vdash B$ und $C \vdash C$ herleitbar:

$\underline{B \vdash B}$	$\underline{C \vdash C}$	
$\underline{B \to C, B \vdash C}$		($\to$ L)
$B \to C \vdash B \to C$		($\to$ R)

BEWEIS von LEMMA 4 für S2:

B1: $\vdash \neg A \leftrightarrow (A \to \bot)$:

$\underline{A \vdash A}$		(Ax*)
$\underline{\neg A, A \vdash}$	$\underline{A \vdash A}$	($\neg$ L), (Ax*)
$\underline{\neg A, A \vdash \bot}$	$\underline{\vdash A, \neg A \qquad \bot \vdash}$	(AB R), ($\neg$ R), ($\bot$ L)
$\underline{\neg A \vdash A \to \bot}$	$\underline{A \to \bot \vdash \neg A}$	($\to$ R), ($\to$ L)
$\underline{\vdash \neg A \to (A \to \bot)}$	$\underline{\vdash (A \to \bot) \to \neg A}$	($\to$ R)
$\vdash \neg A \leftrightarrow (A \to \bot)$		($\land$ R), (DEF $\leftrightarrow$)

B2: $\vdash \bot\leftrightarrow(A\wedge\neg A)$:

$\underline{A \vdash A}$		(Ax*)
$\underline{\neg A, A \vdash}$		($\neg$ L)
$\underline{A\wedge\neg A, A \vdash}$		($\wedge$ L2)
$\underline{A\wedge\neg A, A\wedge\neg A \vdash}$		($\wedge$ L1)
$\underline{A\wedge\neg A \vdash}$	$\underline{\bot \vdash}$	(KÜ L), ($\bot$ L)
$\underline{A\wedge\neg A \vdash \bot}$	$\underline{\bot \vdash A\wedge\neg A}$	(AB R)
$\underline{\vdash A\wedge\neg A\to\bot}$	$\underline{\vdash \bot\to A\wedge\neg A}$	($\to$ R)
$\vdash \bot\leftrightarrow(A\wedge\neg A)$		($\wedge$ R), (DEF $\leftrightarrow$)

B3: $\vdash A\vee\neg A$:

$\underline{A \vdash A}$	(Ax*)
$\underline{\vdash A, \neg A}$	($\neg$ R)
$\underline{\vdash A, A\vee\neg A}$	($\vee$ R2)
$\underline{\vdash A\vee\neg A, A\vee\neg A}$	($\vee$ R1)
$\vdash A\vee\neg A$	(KÜ R)

B4: $\vdash ((A\to B)\to A)\to A$:

$\underline{A \vdash A}$		(Ax*)
$\underline{A \vdash A, B}$		(AB R)
$\underline{\vdash A, A\to B}$	$\underline{A \vdash A}$	($\to$ R), (Ax*)
$\underline{(A\to B)\to A \vdash A, A}$		($\to$ L)
$\underline{(A\to B)\to A \vdash A}$		(KÜ R)
$\vdash ((A\to B)\to A)\to A$		($\to$ R)

B5: $\vdash (A\to(A\to B))\to(A\to B)$:

$\underline{A \vdash A}$		(Ax*)
$\underline{A \vdash A, B}$		(AB R)
$\underline{\vdash A, A\to B}$	$\underline{A\to B \vdash A\to B}$	($\to$ R), (Ax*)
$\underline{A\to(A\to B) \vdash A\to B, A\to B}$		($\to$ L)
$\underline{A\to(A\to B) \vdash A\to B}$		(KÜ R)
$\vdash (A\to(A\to B))\to(A\to B)$		($\to$ R)

B6: $\vdash A\wedge\neg A\to B$:

$\underline{A \vdash A}$	(Ax*)
$\underline{A, \neg A \vdash}$	($\neg$ L)
$\underline{A\wedge\neg A. \neg A \vdash}$	($\wedge$ L1)
$\underline{A\wedge\neg A.A\wedge\neg A \vdash}$	($\wedge$ L2)
$\underline{A\wedge\neg A \vdash}$	(KÜ L)
$\underline{A\wedge\neg A \vdash B}$	(AB R)
$\vdash A\wedge\neg A\to B$	($\to$ R)

B7: $\vdash A\to(\neg A\to B)$:

$\underline{A \vdash A}$	(Ax*)
$\underline{A, \neg A \vdash}$	(¬ L)
$\underline{A, \neg A \vdash B}$	(AB R)
$\underline{A \vdash \neg A\to B}$	(→ R)
$\vdash A\to(\neg A\to B)$	(→ R)

B8: $\vdash \neg A\to(\neg B\to\neg(A\vee B))$:

$\underline{A\vee B \vdash A, B}$	siehe B13
$\underline{\neg A, A\vee B \vdash B}$	(¬ L)
$\underline{\neg A, \neg B, A\vee B \vdash}$	(¬ L)
$\underline{\neg A, \neg B \vdash \neg(A\vee B)}$	(¬ R)
$\underline{\neg A \vdash \neg B\to\neg(A\vee B)}$	(→ R)
$\vdash \neg A\to(\neg B\to\neg(A\vee B))$	(→ R)

B9: $\vdash (\neg A\to\bot)\to A$:

$\underline{A \vdash A}$	(Ax*)
$\underline{\vdash A, \neg A \qquad \bot \vdash}$	(¬ R), (⊥ L)
$\underline{\neg A\to\bot \vdash A}$	(→ L)
$\vdash (\neg A\to\bot)\to A$	(→ R)

B10: $A, A\to B \vdash B$:

$\underline{A \vdash A \qquad B \vdash B}$	(Ax*)
$A, A\to B \vdash B$	(→ L)

B11: $A, B \vdash A\wedge B$:

$\underline{A \vdash A \qquad B \vdash B}$	(Ax*)
$A, B \vdash A\wedge B$	(∧ R)

B12: $A\to(B\to C) \vdash A\wedge B\to C$:

$\qquad\qquad \underline{B \vdash B \qquad C \vdash C}$	(Ax*)
$\underline{A \vdash A \qquad B, B\to C \vdash C}$	(Ax*), (→ L)
$\underline{A, B, A\to(B\to C) \vdash C}$	(→ L)
$\underline{A\wedge B, B, A\to(B\to C) \vdash C}$	(∧ L1)
$\underline{A\wedge B, A\wedge B, A\to(B\to C) \vdash C}$	(∧ L2)
$\underline{A\wedge B, A\to(B\to C) \vdash C}$	(KÜ L)
$A\to(B\to C) \vdash A\wedge B\to C$	(→ R)

B13: $A\vee B \vdash A, B$:

$\underline{A \vdash A \qquad B \vdash B}$	(Ax*)
$A\vee B \vdash A, B$	(∨ L)

Ax10: $\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$:

$\underline{A \vdash A} \qquad \underline{B \vdash B}$ (Ax*)
$\underline{\vdash A, \neg A \qquad \neg B, B \vdash}$ (¬ R), (¬ L)
$\underline{\neg A \rightarrow \neg B, B \vdash A}$ (→ L)
$\underline{\neg A \rightarrow \neg B \vdash B \rightarrow A}$ (→ R)
$\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ (→ R)

Ax11: $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$:

$\underline{A, B \vdash A \wedge B}$ B11
$\underline{A \vdash B \rightarrow A \wedge B}$ (→ R)
$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$ (→ R)

Ax12: $\vdash \bot \rightarrow A$:

$\underline{\bot \vdash}$ (⊥ L)
$\underline{\bot \vdash A}$ (AB R)
$\vdash \bot \rightarrow A$ (→ R)

Ax13: $\vdash A \vee (A \rightarrow \bot)$:

$\underline{A \vdash A}$ (Ax*)
$\underline{A \vdash A, \bot}$ (AB R)
$\underline{\vdash A, A \rightarrow \bot}$ (→ R)
$\underline{\vdash A \vee (A \rightarrow \bot), A \rightarrow \bot}$ (∨ R1)
$\underline{\vdash A \vee (A \rightarrow \bot), A \vee (A \rightarrow \bot)}$ (∨ R2)
$\vdash A \vee (A \rightarrow \bot)$ (KÜ R)

BEWEIS von LEMMA 5 für $S2^+$:
$X \vdash Y$ herleitbar in $S2^+$ gdw $\vdash E(X \vdash Y)$ herleitbar in $S2^+$

$X \neq \emptyset$ und $Y \neq \emptyset$: $E(X \vdash Y) = \wedge X \rightarrow \vee Y$:

⇒: $\underline{X \vdash Y}$
$\underline{\wedge X \vdash \vee Y}$ (∧ L1), (∧ L2), (KÜ L), (∨ R1), (∨ R2), (KÜ R)
$\vdash \wedge X \rightarrow \vee Y$ (→ R)

⇐: $\underline{X \vdash \wedge X \qquad \wedge X, \wedge X \rightarrow \vee Y \vdash \vee Y}$ B7, B6
$\underline{X, \wedge X \rightarrow \vee Y \vdash \vee Y \qquad \vee Y \vdash Y}$ (CUT), B8
$\underline{\vdash \wedge X \rightarrow \vee Y \qquad X, \wedge X \rightarrow \vee Y \vdash Y}$ (CUT)
$X \vdash Y$ (CUT)

$X = \emptyset$ und $Y \neq \emptyset$: $E(X \vdash Y) = \vee Y$,
$X \neq \emptyset$ und $Y = \emptyset$: $E(X \vdash Y) = \neg \wedge X$,
$X = \emptyset$ und $Y = \emptyset$: $E(X \vdash Y) = \bot$: analog.

BEWEIS von LEMMA 6 für S2:
für alle Axiome Ax gilt: $\vdash$ Ax ist herleitbar in S2

Ax1: $\vdash A\rightarrow(B\rightarrow A)$

$\underline{A \vdash A}$	(Ax*)
$\underline{B, A \vdash A}$	(AB L)
$\underline{A \vdash B\rightarrow A}$	($\rightarrow$ R)
$\vdash A\rightarrow(B\rightarrow A)$	($\rightarrow$ R)

Ax2: V2 $\vdash (A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$

$\underline{B \vdash B}$	$\underline{C \vdash C}$		(Ax*)
$\underline{B\rightarrow C, B \vdash C}$		$\underline{A \vdash A}$	($\rightarrow$ L), (Ax*)
$\underline{A, A\rightarrow(B\rightarrow C), B \vdash C}$		$\underline{A \vdash A}$	($\rightarrow$ L), (Ax*)
$\underline{A, A, A\rightarrow B, A\rightarrow(B\rightarrow C) \vdash C}$			($\rightarrow$ L)
$\underline{A, A\rightarrow B, A\rightarrow(B\rightarrow C) \vdash C}$			(KÜ L)
$\underline{A\rightarrow B, A\rightarrow(B\rightarrow C) \vdash A\rightarrow C}$			($\rightarrow$ R)
$\underline{A\rightarrow(B\rightarrow C) \vdash (A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)}$			($\rightarrow$ R)
$\vdash (A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$			($\rightarrow$ R)

Ax3a: V2 $\vdash A\wedge B\rightarrow A$

$\underline{A \vdash A}$	(Ax*)
$\underline{A\wedge B \vdash A}$	($\wedge$ L1)
$\vdash A\wedge B\rightarrow A$	($\rightarrow$R)

Ax3b: V2 $\vdash A\wedge B\rightarrow B$

$\underline{B \vdash B}$	(Ax*)
$\underline{A\wedge B \vdash B}$	($\wedge$ L2)
$\vdash A\wedge B\rightarrow B$	($\rightarrow$ R)

Ax4: $\vdash (A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow B\wedge C))$

$\underline{A \vdash A}$	$\underline{B \vdash B}$	$\underline{A \vdash A}$	$\underline{C \vdash C}$	(Ax*)
$\underline{A, A\rightarrow B \vdash B}$		$\underline{A, A\rightarrow C \vdash C}$		($\rightarrow$ L)
$\underline{A, A, A\rightarrow B, A\rightarrow C \vdash B\wedge C}$				($\wedge$ R)
$\underline{A, A\rightarrow B, A\rightarrow C \vdash B\wedge C}$				(KÜ L)
$\underline{A\rightarrow B, A\rightarrow C \vdash A\rightarrow(B\wedge C)}$				($\rightarrow$ R)
$\underline{A\rightarrow B \vdash (A\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow(B\wedge C))}$				($\rightarrow$ R)
$\vdash (A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow B\wedge C))$				($\rightarrow$ R)

Ax5a: $\vdash A\rightarrow A\vee B$

$\underline{A \vdash A}$	(Ax*)
$\underline{A \vdash A\vee B}$	($\vee$ R1)
$\vdash A\rightarrow A\vee B$	($\rightarrow$ R)

Ax5b: $\vdash B \to A \lor B$

$\underline{B \vdash B}$ (Ax*)

$\underline{B \vdash A \lor B}$ ($\lor$ R2)

$\vdash B \to A \lor B$ ($\to$ R)

Ax6: $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \lor B \to C))$

$\underline{A \vdash A \qquad B \vdash B}$ (Ax*)

$\underline{A \lor B \vdash A, B \qquad C \vdash C}$ ($\lor$ L), (Ax*)

$\underline{B \to C, A \lor B \vdash A, C \qquad C \vdash C}$ ($\to$ L), (Ax*)

$\underline{A \to C, B \to C, A \lor B \vdash C, C}$ ($\to$ L)

$\underline{A \to C, B \to C, A \lor B \vdash C}$ (KÜ R)

$\underline{A \to C, B \to C \vdash A \lor B \to C}$ ($\to$ R)

$\underline{A \to C \vdash (B \to C) \to (A \lor B \to C)}$ ($\to$ R)

$\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \lor B \to C))$ ($\to$ R)

Ax7: $\vdash ((A \to \neg B) \to ((A \to B) \to \neg A))$

$\underline{A \vdash A} \qquad \underline{B \vdash B}$ (Ax*)

$\underline{\vdash A, \neg A \qquad B, \neg B \vdash} \qquad \underline{A \vdash A}$ ($\neg$ R), ($\neg$ L), (Ax*)

$\underline{A \to B, \neg B \vdash \neg A \qquad \vdash A, \neg A}$ ($\to$ L), ($\neg$ R)

$\underline{A \to \neg B, A \to B \vdash \neg A, \neg A}$ ($\to$ L)

$\underline{A \to \neg B, A \to B \vdash \neg A}$ (KÜ R)

$\underline{A \to \neg B \vdash (A \to B) \to \neg A}$ ($\to$ R)

$\vdash ((A \to \neg B) \to ((A \to B) \to \neg A))$ ($\to$ R)

Ax8: $\vdash \neg\neg A \to A$

$\underline{A \vdash A}$ (Ax*)

$\underline{\vdash A, \neg A}$ ($\neg$ R)

$\underline{\neg\neg A \vdash A}$ ($\neg$ L)

$\vdash \neg\neg A \to A$ ($\to$ R)

Ax9: $\vdash ((A \to \bot) \to \bot) \to A$

$\underline{A \vdash A}$ (Ax*)

$\underline{A \vdash A, \bot}$ (AB R)

$\underline{\vdash A, A \to \bot \qquad \bot \vdash}$ ($\to$ R), ($\bot$ L)

$\underline{(A \to \bot) \to \bot \vdash A}$ ($\to$ L)

$\vdash ((A \to \bot) \to \bot) \to A$ ($\to$ R)

BEWEIS von LEMMA 3 für S2a:
Wir zeigen: $A \vdash A$ ist herleitbar in S2a

Induktion nach g(A):
Induktionsanfang, g(A)=0:

$p \vdash p$ (Ax)

$\underline{\bot \vdash \emptyset}$ ($\bot$ L)

$\bot \vdash \bot$ (AB R)

Induktionsschritt, $g(A) > 0$:

$A := \neg B$: nach Induktionsvoraussetzung ist $B \vdash B$ herleitbar:

$B \vdash B$	IV
$\neg B, B \vdash$	$(\neg L)$
$\neg B \vdash \neg B$	$(\neg R)$

$A := B \wedge C$: nach Induktionsvoraussetzung sind $B \vdash B$ und $C \vdash C$ herleitbar:

$B \vdash B$	$C \vdash C$	
$B \wedge C \vdash B$	$B \wedge C \vdash C$	$(\wedge L1)$, $(\wedge L2)$
$B \wedge C \vdash B \wedge C$		$(\wedge Ra)$

$A := B \vee C$: nach Induktionsvoraussetzung sind $B \vdash B$ und $C \vdash C$ herleitbar:

$B \vdash B$	$C \vdash C$	
$B \vdash B \vee C$	$C \vdash B \vee C$	$(\vee R1)$, $(\vee R2)$
$B \vee C \vdash B \vee C$		$(\vee La)$

$A := B \rightarrow C$: nach Induktionsvoraussetzung sind $B \vdash B$ und $C \vdash C$ herleitbar:

$B \vdash B$	$C \vdash C$	
$B \vdash B, C$	$B, C \vdash C$	(AB R), (AB L)
$B \rightarrow C, B \vdash C$		$(\rightarrow La)$
$B \rightarrow C \vdash B \rightarrow C$		$(\rightarrow R)$

BEWEIS von LEMMA 4 für S2a:

B1: $\vdash \neg A \leftrightarrow (A \rightarrow \bot)$:

$A \vdash A$	$A \vdash A$		(Ax*)
$\neg A, A \vdash$	$\vdash A, \neg A$	$\bot \vdash$	$(\neg L)$, $(\neg R)$, $(\bot L)$
$\neg A, A \vdash \bot$	$\vdash A, \neg A$	$\bot \vdash \neg A$	(AB R)
$\neg A \vdash A \rightarrow \bot$	$A \rightarrow \bot \vdash \neg A$		$(\rightarrow R)$, $(\rightarrow La)$
$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow \bot)$	$\vdash (A \rightarrow \bot) \rightarrow \neg A$		$(\rightarrow R)$
$\vdash \neg A \leftrightarrow (A \rightarrow \bot)$			$(\wedge Ra)$, (DEF $\leftrightarrow$)

B2: wie S2

B3: wie S2

B4: $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$:

$A \vdash A$		(Ax*)
$A \vdash A, B$		(AB R)
$\vdash A, A \rightarrow B$	$A \vdash A$	$(\rightarrow R)$, (Ax*)
$(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A$		$(\rightarrow La)$
$\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$		$(\rightarrow R)$

B5: $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$:

$A \vdash A$		(Ax*)
$A \vdash A, B$		(AB R)
$\vdash A, A \rightarrow B$	$A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B$	$(\rightarrow R)$, (Ax*)
$A \rightarrow (A \rightarrow B) \vdash A \rightarrow B$		$(\rightarrow La)$
$\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$		$(\rightarrow R)$

B6: wie S2

B7: wie S2

B8: $\vdash \neg A \to (\neg B \to \neg(A \vee B))$:

$A \vee B \vdash A, B$		B13 und weiter wie bei S2

B9: $\vdash (\neg A \to \bot) \to A$:

$\underline{A \vdash A}$	$\underline{\bot \vdash}$	(Ax*), ($\bot$ L)
$\underline{\vdash A, \neg A}$	$\underline{\bot \vdash A}$	($\neg$ R), (AB R)
$\underline{\neg A \to \bot \vdash A}$		($\to$ La)
$\vdash (\neg A \to \bot) \to A$		($\to$ R)

B10: $\vdash A, A \to B \vdash B$:

$\underline{A \vdash A}$	$\underline{B \vdash B}$	(Ax*)
$\underline{A \vdash B, A}$	$\underline{B, A \vdash B}$	(AB L), (AB R)
$A, A \to B \vdash B$		($\to$ La)

B11: $A, B \vdash A \wedge B$:

$\underline{A \vdash A}$	$\underline{B \vdash B}$	(Ax*)
$\underline{A, B \vdash A}$	$\underline{A, B \vdash B}$	(AB L), (AB R)
$A, B \vdash A \wedge B$		($\wedge$ Ra)

B12: $A \to (B \to C) \vdash A \wedge B \to C$:

	$\underline{B \vdash B}$	$\underline{C \vdash C}$	(Ax*)
	$\underline{B \vdash B, C}$	$\underline{B, C \vdash C}$	(AB R), (AB L)
$\underline{A \vdash A}$	$\underline{B, B \to C \vdash C}$		(Ax*), ($\to$ La)
$\underline{A, B \vdash A, C}$	$\underline{A, B, B \to C \vdash C}$		(AB L), (AB R)
$\underline{A, B, A \to (B \to C) \vdash C}$			($\to$ La)
$\underline{A \wedge B, B, A \to (B \to C) \vdash C}$			($\wedge$ L1)
$\underline{A \wedge B, A \wedge B, A \to (B \to C) \vdash C}$			($\wedge$ L2)
$\underline{A \wedge B, A \to (B \to C) \vdash C}$			(KÜ L)
$A \to (B \to C) \vdash A \wedge B \to C$			($\to$ R)

B13: $A \vee B \vdash A, B$:

$\underline{A \vdash A}$	$\underline{B \vdash B}$	(Ax*)
$\underline{A \vdash A, B}$	$\underline{B \vdash A, B}$	(AB L), (AB R)
$A \vee B \vdash A, B$		($\vee$ La)

Ax10: $\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$:

$\underline{A \vdash A}$	$\underline{B \vdash B}$	(Ax*)
$\underline{\vdash A, \neg A}$	$\underline{\neg B, B \vdash}$	($\neg$ R), ($\neg$ L)
$\underline{B \vdash A, \neg A}$	$\underline{\neg B, B \vdash A}$	(AB L), (AB R)
$\underline{\neg A \to \neg B, B \vdash A}$		($\to$ La)
$\underline{\neg A \to \neg B \vdash B \to A}$		($\to$ R)
$\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$		($\to$ R)

Ax11: ⊦ A→(B→A∧B):

A, B ⊦ A∧B   B11 und weiter wie bei S2

Ax12: wie S2

Ax13: wie S2

BEWEIS von LEMMA 6 für S2a:

Ax1: wie S2

Ax2: ⊦ (A→(B→C))→((A→B)→(A→C))

B ⊦ B	C ⊦ C			(Ax*)
B ⊦ B, C	B, C ⊦ C			(AB R), (AB L)
B→C, B ⊦ C		A ⊦ A		(→ La), (Ax*)
A, B→C, B ⊦ C		A, B ⊦ A, C	A ⊦ A	(AB L), (AB R), (Ax*)
A, A→(B→C), B ⊦ C			A, A→((B→C) ⊦ A, C	(→ La), (AB L), (AB R)
A, A→B, A→(B→C) ⊦ C				(→ La)
A→B, A→(B→C) ⊦ A→C				(→ R)
A→(B→C) ⊦ (A→B)→(A→C)				(→ R)
⊦ (A→(B→C))→((A→B)→(A→C))				(→ R)

Ax3a bzw. Ax3b: wie S2

Ax4: ⊦ (A→B)→((A→C)→(A→B∧C))

A ⊦ A	B ⊦ B	A ⊦ A	C ⊦ C	(Ax*)
A ⊦ B, A	B, A ⊦ B	A ⊦ C, A	C, A ⊦ C	(AB L), (AB R)
A, A→B ⊦ B		A, A→C ⊦ C		(→ La)
A, A→B, A→C ⊦ B		A, A→B, A→C ⊦ C		(AB L)
A, A→B, A→C ⊦ B∧C				(∧ Ra)
A→B, A→C ⊦ A→(B∧C)				(→ R)
A→B ⊦ (A→C)→(A→(B∧C))				(→ R)
⊦ (A→B)→((A→C)→(A→B∧C))				(→ R)

Ax5a bzw. Ax5b: wie S2

Ax6: ⊦ (A→C)→((B→C)→(A∨B→C))

A ⊦ A	B ⊦ B			(Ax*)
A ⊦ A, B		B ⊦ A, B		(AB R)
A∨B ⊦ A, B		C ⊦ C		(∨ La), (Ax*)
A∨B ⊦ A, B, C		C, A∨B ⊦ C, A	C ⊦ C	(AB L), (AB R), (Ax*)
B→C, A∨B ⊦ A, C			B→C, A∨B, C ⊦ C	(→ La), (AB L), (AB R)
A→C, B→C, A∨B ⊦ C				(→ La)
A→C, B→C ⊦ A∨B→C				(→ R)
A→C ⊦ (B→C)→(A∨B→C)				(→ R)
⊦ (A→C)→((B→C)→(A∨B→C))				(→ R)

Ax7: $\vdash ((A \to \neg B) \to ((A \to B) \to \neg A))$

$\underline{A \vdash A}$	$\underline{B \vdash B}$		(Ax*)
$\underline{\vdash A, \neg A}$	$\underline{B, \neg B \vdash}$	$\underline{A \vdash A}$	(¬ R), (¬ L), (Ax*)
$\underline{\neg B \vdash A, \neg A}$	$\underline{B, \neg B \vdash \neg A}$	$\underline{\vdash A, \neg A}$	(AB L), (AB R), (¬ R)
$\underline{A \to B, \neg B \vdash \neg A}$		$\underline{A \to B \vdash A, \neg A}$	(→ La), (AB L)
$\underline{A \to \neg B, A \to B \vdash \neg A}$			(→ La)
$\underline{A \to \neg B \vdash (A \to B) \to \neg A}$			(→ R)
$\vdash ((A \to \neg B) \to ((A \to B) \to \neg A))$			(→ R)

Ax8: wie S2

Ax9: $\vdash ((A \to \bot) \to \bot) \to A$

$\underline{A \vdash A}$		(Ax*)
$\underline{A \vdash A, \bot}$	$\underline{\bot \vdash}$	(AB R), (⊥ L)
$\underline{\vdash A, A \to \bot}$	$\underline{\bot \vdash A}$	(→ R), (AB R)
$\underline{(A \to \bot) \to \bot \vdash A}$		(→ La)
$\vdash ((A \to \bot) \to \bot) \to A$		(→ R)

Der Induktionsschritt beim Beweis der Vollständigkeit von S2a^{+}, $\vdash A$ und $\vdash A \to B \Rightarrow\ \vdash B$, funktioniert nun folgendermassen:

		$\underline{A \vdash A}$	$\underline{B \vdash B}$	(Ax*)
	$\underline{\vdash A}$	$\underline{A \vdash A, B}$	$\underline{A, B \vdash B}$	(IV), (AB R), (AB L)
$\underline{\vdash A \to B}$	$\underline{A \to B \vdash A, B}$	$\underline{A, A \to B \vdash B}$		(IV), (AB L), (AB R), (→ La)
$\underline{\vdash A \to B, B}$		$\underline{A \to B \vdash B}$		(AB R), (CUTa)
	$\vdash B$			(CUTa)

Variante S2:

Sind X und Y endliche Multimengen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz

Axiome:

$p \vdash p$ (Ax)

$\bot \vdash$ ($\bot$ L)

Schlussregeln:

Logische Regeln:

$$\frac{A, X \vdash Y}{A\wedge B, X \vdash Y} \quad (\wedge\ L1) \qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad Z \vdash U, B}{X, Z \vdash Y, U, A\wedge B} \quad (\wedge\ R)$$

$$\frac{B, X \vdash Y}{A\wedge B, X \vdash Y} \quad (\wedge\ L2)$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, Z \vdash U}{A\vee B, X, Z \vdash Y, U} \quad (\vee\ L) \qquad \frac{X \vdash Y, A}{X \vdash Y, A\vee B} \quad (\vee\ R1)$$

$$\frac{X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A\vee B} \quad (\vee\ R2)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, Z \vdash U}{A\to B, X, Z \vdash Y, U} \quad (\to L) \qquad \frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A\to B} \quad (\to R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y} \quad (\neg\ L) \qquad \frac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A} \quad (\neg\ R)$$

Strukturschlussregeln:

$$\frac{X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \quad (AB\ L) \qquad \frac{X \vdash Y}{X \vdash Y, A} \quad (AB\ R)$$

$$\frac{A, A, X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \quad (KÜ\ L) \qquad \frac{X \vdash Y, A, A}{X \vdash Y, A} \quad (KÜ\ R)$$

Variante S2a:

Sind X und Y endliche Multimengen von Formeln, so ist X $\vdash$ Y eine Sequenz

Axiome:

$p \vdash p$ (Ax)

$\bot \vdash$ ($\bot$ L)

Schlussregeln:

Logische Regeln:

$$\frac{A, X \vdash Y}{A \land B, X \vdash Y} \quad (\land\ L1) \qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \land B} \quad (\land\ Ra)$$

$$\frac{B, X \vdash Y}{A \land B, X \vdash Y} \quad (\land\ L2)$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, X \vdash Y}{A \lor B, X \vdash Y} \quad (\lor\ La) \qquad \frac{X \vdash Y, A}{X \vdash Y, A \lor B} \quad (\lor\ R1)$$

$$\frac{X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \lor B} \quad (\lor\ R2)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, X \vdash Y}{A \to B, X \vdash Y} \quad (\to La) \qquad \frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \to B} \quad (\to R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y} \quad (\neg\ L) \qquad \frac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A} \quad (\neg\ R)$$

Strukturschlussregeln:

$$\frac{X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \quad (\text{AB L}) \qquad \frac{X \vdash Y}{X \vdash Y, A} \quad (\text{AB R})$$

$$\frac{A, A, X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \quad (\text{KÜ L}) \qquad \frac{X \vdash Y, A, A}{X \vdash Y, A} \quad (\text{KÜ R})$$

4.1.7 Die Varianten S3 und S3a

DEFINITION (S3):
Sind X und Y endliche Multimengen von Formeln, so ist X $\vdash$ Y eine Sequenz
S3 sei folgender Kalkül:
Axiome: (AX), ($\perp$ LL)
Linke logische Regeln: ($\wedge$ L1), ($\wedge$ L2), ($\vee$ L), ($\rightarrow$ L), ($\neg$ L)
Rechte logische Regeln: ($\wedge$ R), ($\vee$ R1), ($\vee$ R2), ($\rightarrow$ R), ($\neg$ R)
Linke Strukturschlussregeln: (KÜ L)
Rechte Strukturschlussregeln: (KÜ R)

DEFINITION (S3a):
Sind X und Y endliche Multimengen von Formeln, so ist X $\vdash$ Y eine Sequenz
S3a sei folgender Kalkül:
Axiome: (AX), ($\perp$ LL)
Linke logische Regeln: ($\wedge$ L1), ($\wedge$ L2), ($\vee$ La), ($\rightarrow$ La), ($\neg$ L)
Rechte logische Regeln: ($\wedge$ Ra), ($\vee$ R1), ($\vee$ R2), ($\rightarrow$ R), ($\neg$ R)
Linke Strukturschlussregeln: (KÜ L)
Rechte Strukturschlussregeln: (KÜ R)

BEMERKUNG:
S3a entspricht dem Kalkül G2cp in der Signatur {$\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$} von Troelstra/Schwichtenberg (1996).

LEMMA 10:
Die Abschwächungsregeln sind zulässig in S3 und S3a.

BEWEIS:
Es gilt sogar: X $\vdash$n Y $\Rightarrow$ X, Z $\vdash$n Y, U;
der Beweis erfolgt durch Herleitungsinduktion als ÜBUNG.

FOLGERUNG:
Nach Lemma 1 gilt:
S3 und S3a sind beide äquivalent zu S2.

BEMERKUNG:
Nach Lemma 8 gilt der Schnitteliminationssatz für S3 und S3a; der Beweis kann auch direkt wie für S2, d.h. mit (MIX) anstelle von (CUT), geführt werden.

Einige Herleitungen in S3:

(AX*): X, A $\vdash$ A, Y ist herleitbar in S3
Induktion nach g(A):
g(A)=0:
A=p: X, p $\vdash$ p, Y ist Axiom
A=$\perp$: X, $\perp$ $\vdash$ $\perp$, Y_0 ist Axiom

$g(A)>0$:

$A:=\neg B$:	$\underline{X, B \vdash B, Y}$		(IV)
	$\underline{X, \neg B, B \vdash Y}$		($\neg$ L)
	$X, \neg B \vdash \neg B, Y$		($\neg$ R)

$A:=B\wedge C$:	$\underline{X, B \vdash B, Y}$	$\underline{C \vdash C}$	(IV)
	$\underline{X, B\wedge C \vdash B, Y \qquad B\wedge C \vdash C}$		($\wedge$ L1), ($\wedge$L 2)
	$\underline{X, B\wedge C, B\wedge C \vdash B\wedge C, Y}$		($\wedge$ R)
	$X, B\wedge C \vdash B\wedge C, Y$		(KÜ L)

$A:=B\vee C$:	$\underline{X, B \vdash B, Y}$	$\underline{C \vdash C}$	(IV)
	$\underline{X, B \vdash B\vee C, Y}$	$\underline{C \vdash B\vee C}$	($\vee$ R1), ($\vee$ R2)
	$\underline{X, B\vee C \vdash B\vee C, B\vee C, Y}$		($\vee$ L)
	$X, B\vee C \vdash B\vee C, Y$		(KÜ R)

$A:=B\rightarrow C$:	$\underline{X, B \vdash B, Y \qquad\qquad C \vdash C}$		(IV)
	$\underline{X, B\rightarrow C, B \vdash C, Y}$		($\rightarrow$ L)
	$X, B\rightarrow C \vdash B\rightarrow C, Y$		($\rightarrow$ R)

B1: $\vdash \neg A\leftrightarrow(A\rightarrow\bot)$

$\underline{A \vdash A, \bot}$	$\underline{A \vdash A}$	(Ax*)
$\underline{\neg A, A \vdash \bot}$	$\underline{\vdash A, \neg A \qquad \bot \vdash}$	($\neg$ L), ($\neg$ R), ($\bot$ L)
$\underline{\neg A \vdash A\rightarrow\bot}$	$\underline{A\rightarrow\bot \vdash \neg A}$	($\rightarrow$ R), ($\rightarrow$ L)
$\underline{\vdash \neg A\rightarrow(A\rightarrow\bot) \qquad\qquad \vdash (A\rightarrow\bot)\rightarrow\neg A}$		($\rightarrow$ R)
$\vdash \neg A\leftrightarrow(A\rightarrow\bot)$		($\wedge$ R), (DEF $\leftrightarrow$)

B2: $\vdash \bot\leftrightarrow A\wedge\neg A$

$\underline{A \vdash A, \bot}$		(Ax*)
$\underline{\neg A, A \vdash, \bot}$		($\neg$ L)
$\underline{A\wedge\neg A, A \vdash, \bot}$		($\wedge$ L2)
$\underline{A\wedge\neg A, A\wedge\neg A \vdash, \bot}$		($\wedge$ L1)
$\underline{A\wedge\neg A \vdash, \bot}$	$\underline{\bot \vdash A\wedge\neg A}$	(KÜ L), (L$\bot$)
$\underline{\vdash A\wedge\neg A\rightarrow\bot \qquad\qquad \vdash \bot\rightarrow A\wedge\neg A}$		($\rightarrow$ R)
$\vdash \bot\leftrightarrow(A\wedge\neg A)$		($\wedge$ R), (DEF $\leftrightarrow$)

B10: $A, A\rightarrow B \vdash B$

$\underline{A \vdash A \qquad B \vdash B}$	(Ax*)
$A\rightarrow B, A \vdash B$	($\rightarrow$ L)

Ax1: $\vdash A\rightarrow(B\rightarrow A)$

$\underline{B, A \vdash A}$	(Ax *)
$\underline{A \vdash B\rightarrow A}$	($\rightarrow$ R)
$\vdash A\rightarrow(B\rightarrow A)$	($\rightarrow$ R)

Einige Herleitungen in S3a:

Ax6: $\vdash (A\to C)\to((B\to C)\to(A\vee B\to C))$

$\underline{A \vdash A, B, C}$	$\underline{B \vdash A, B, C}$	(Ax *)
$\underline{A\vee B \vdash A, B, C \quad\quad C, A\vee B \vdash C, A}$		$(\vee$ La), (Ax*)
$\underline{B\to C, A\vee B \vdash A, C \quad\quad B\to C, A\vee B, C \vdash C}$		$(\to$ La), (Ax*)
$\underline{A\to C, B\to C, A\vee B \vdash C}$		$(\to$ La)
$\underline{A\to C, B\to C \vdash A\vee B\to C}$		$(\to$ R)
$\underline{A\to C \vdash (B\to C)\to(A\vee B\to C)}$		$(\to$ R)
$\vdash (A\to C)\to((B\to C)\to(A\vee B\to C))$		$(\to$ R)

Ax7: $\vdash ((A\to\neg B)\to((A\to B)\to\neg A))$

$\underline{\neg B, A \vdash A}$	$\underline{B \vdash B, \neg A}$		(Ax*)
$\underline{\neg B \vdash A, \neg A \quad\quad B, \neg B \vdash \neg A}$		$\underline{A\to B, A \vdash A}$	$(\neg$ R), $(\neg$ L), (Ax*)
$\underline{A\to B, \neg B \vdash \neg A \quad\quad\quad\quad A\to B \vdash A, \neg A}$			$(\to$ La), $(\neg$ R)
$\underline{A\to\neg B, A\to B \vdash \neg A}$			$(\to$ La)
$\underline{A\to\neg B \vdash (A\to B)\to\neg A}$			$(\to$ R)
$\vdash ((A\to\neg B)\to((A\to B)\to\neg A))$			$(\to$ R)

Variante S3:

Sind X und Y endliche Multimengen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz

Axiome:

$X, p \vdash p, Y$ (AX)

$X, \bot \vdash Y$ ($\bot$ LL)

Schlussregeln:

Logische Regeln:

$$\frac{A, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y} \quad (\wedge\ \text{L1}) \qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad Z \vdash U, B}{X, Z \vdash Y, U, A \wedge B} \quad (\wedge\ \text{R})$$

$$\frac{B, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y} \quad (\wedge\ \text{L2})$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, Z \vdash U}{A \vee B, X, Z \vdash Y, U} \quad (\vee\ \text{L}) \qquad \frac{X \vdash Y, A}{X \vdash Y, A \vee B} \quad (\vee\ \text{R1})$$

$$\frac{X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \vee B} \quad (\vee\ \text{R2})$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, Z \vdash U}{A \rightarrow B, X, Z \vdash Y, U} \quad (\rightarrow \text{L}) \qquad \frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \rightarrow B} \quad (\rightarrow \text{R})$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y} \quad (\neg\ \text{L}) \qquad \frac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A} \quad (\neg\ \text{R})$$

Strukturschlussregeln:

$$\frac{A, A, X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \quad (\text{KÜ L}) \qquad \frac{X \vdash Y, A, A}{X \vdash Y, A} \quad (\text{KÜ R})$$

Variante S3a:

Sind X und Y endliche Multimengen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz

Axiome:

$X, p \vdash p, Y$ (AX)

$X, \bot \vdash Y$ ($\bot$ LL)

Schlussregeln:

Logische Regeln:

$$\frac{A, X \vdash Y}{A\wedge B, X \vdash Y} \quad (\wedge\ \mathrm{L1}) \qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A\wedge B} \quad (\wedge\ \mathrm{Ra})$$

$$\frac{B, X \vdash Y}{A\wedge B, X \vdash Y} \quad (\wedge\ \mathrm{L2})$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, X \vdash Y}{A\vee B, X \vdash Y} \quad (\vee\ \mathrm{La}) \qquad \frac{X \vdash Y, A}{X \vdash Y, A\vee B} \quad (\vee\ \mathrm{R1})$$

$$\frac{X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A\vee B} \quad (\vee\ \mathrm{R2})$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, X \vdash Y}{A\to B, X \vdash Y} \quad (\to \mathrm{La}) \qquad \frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A\to B} \quad (\to \mathrm{R})$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y} \quad (\neg\ \mathrm{L}) \qquad \frac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A} \quad (\neg\ \mathrm{R})$$

Strukturschlussregeln:

$$\frac{A, A, X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \quad (\mathrm{KÜ\ L}) \qquad \frac{X \vdash Y, A, A}{X \vdash Y, A} \quad (\mathrm{KÜ\ R})$$

4.1.8 Die Varianten S4 und S4a

DEFINITION (S4):
Sind X und Y endliche Multimengen von Formeln, so ist X $\vdash$ Y eine Sequenz
S4 sei folgender Kalkül:
Axiome: (AX), ($\perp$ LL)
Linke logische Regeln: ($\wedge$ L), ($\vee$ L), ($\rightarrow$ L), ($\neg$ L)
Rechte logische Regeln: ($\wedge$ R), ($\vee$ R), ($\rightarrow$ R), ($\neg$ R)

DEFINITION (S4a):
Sind X und Y endliche Multimengen von Formeln, so ist X $\vdash$ Y eine Sequenz
S4a sei folgender Kalkül:
Axiome: (AX), ($\perp$ LL)
Linke logische Regeln: ($\wedge$ L), ($\vee$ La), ($\rightarrow$ La), ($\neg$ L)
Rechte logische Regeln: ($\wedge$ Ra), ($\vee$ R), ($\rightarrow$ R), ($\neg$ R)

BEMERKUNG:
S4a entspricht dem Kalkül G3cp in der Signatur $\{\perp, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ von Troelstra/Schwichtenberg; wird auch verwendet von Czermak: Logik. Vorlesungsskriptum, mit Folgen statt Multimengen in der Signatur $\{\perp, \rightarrow\}$; von Socher-Ambrosius (1994), mit Mengen statt Multimengen und (AX*) statt (AX); ebenso von Sundholm (1983).

LEMMA 11:
Für S4 und S4a gilt: X $\vdash$n Y $\Rightarrow$ X, Z $\vdash$n Y, U

BEWEIS:
Durch Herleitungsinduktion als ÜBUNG.

LEMMA 12:
S4 ist unvollständig

BEWEIS:
Um etwa $\vdash (A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow B\wedge C))$ herzuleiten, bräuchte man
$A, A\rightarrow B, A\rightarrow C \vdash B\wedge C$, und dazu
$A \vdash A$ und $C, A, A\rightarrow B \vdash B\wedge C$; daraus erhält man jedoch lediglich
$A, A, A\rightarrow B, A\rightarrow C \vdash B\wedge C$; ohne (KÜ L) geht es hier nicht weiter.

BEMERKUNG:
Im folgenden betrachten wir nur mehr S4a

BEMERKUNG (zur intuitionistische Logik):
Die intuitionistische Variante S4ai von S4a entsteht wieder durch Beschränkung der zugelassenen Sequenzen auf intuitionistische Sequenzen und enthält folgende Axiome und Regeln:
Axiome:
$X, p \vdash p$
$\perp, X \vdash A$ ($\perp$ L)‘

Regeln:

$$\frac{A, B, X \vdash C}{A\wedge B, X \vdash C} \qquad \frac{X \vdash A \qquad X \vdash B}{X \vdash A\wedge B}$$

$$\frac{A, X \vdash C \qquad B, X \vdash C}{A\vee B, X \vdash C} \qquad \frac{X \vdash A}{X \vdash A\vee B} \qquad \frac{X \vdash B}{X \vdash A\vee B}$$

$$\frac{A\rightarrow B, X \vdash A \qquad B, X \vdash C}{A\rightarrow B, X \vdash C} \qquad \frac{A, X \vdash B}{X \vdash A\rightarrow B}$$

$$\frac{X \vdash A}{\neg A, X \vdash} \qquad \frac{A, X \vdash}{X \vdash \neg A}$$

BEMERKUNG (zur minimalen Logik):
Die minimale Variante S4am entsteht aus S4ai durch Weglassen von ($\perp$ L)‘.

LEMMA 13 (Inversionslemma für S4a):
(i) $A\wedge B, X \vdash_n Y \Rightarrow A, B, X \vdash_n Y$
(ii) $X \vdash_n Y, A\wedge B \Rightarrow X \vdash_n Y, A$ und $X \vdash_n Y, B$
(iii) $A\vee B, X \vdash_n Y \Rightarrow A, X \vdash_n Y$ und $B, X \vdash_n Y$
(iv) $X \vdash_n Y, A\vee B \Rightarrow X \vdash_n Y, A, B$
(v) $A\rightarrow B, X \vdash_n Y \Rightarrow X \vdash_n Y, A$ und $B, X \vdash_n Y$
(vi) $X \vdash_n Y, A\rightarrow B \Rightarrow A, X \vdash_n Y, B$
(vii) $\neg A, X \vdash_n Y \Rightarrow X \vdash_n Y, A$
(viii) $X \vdash_n Y, \neg A \Rightarrow A, X \vdash_n Y$

BEWEIS:
Durch Induktion nach n; als typisches Beispiel zeigen wir:
(v) sei H folgende Herleitung:

H
...
$A\rightarrow B, X \vdash_{n+1} Y$

(v.1) wenn $A\rightarrow B, X \vdash_{n+1} Y$ ein Axiom ist (es gibt ein $p \in X\cap Y$), dann sind auch $X \vdash_n Y, A$ und $B, X \vdash_n Y$ Axiome;

(v.2) wenn $A\rightarrow B, X \vdash_{n+1} Y$ kein Axiom ist und $A\rightarrow B$ nicht Hauptformel ist, wenden wir (IV) auf die Prämisse(n) an und verwenden die gleiche Regel, um Herleitungen von $X \vdash_n Y, A$ und $B, X \vdash_n Y$ zu erhalten:

die letzte Regel von H war ($\wedge$ L):

H
...
$$\frac{C, D, A\rightarrow B, X \vdash_n Y}{C\wedge D, A\rightarrow B, X \vdash_{n+1} Y} \quad (\wedge\ L)$$

nach (IV) gilt:

$$\frac{\begin{matrix}\dots\\ C, D, X_0 \vdash_n Y, A\end{matrix}}{C\wedge D, X_0 \vdash_{n+1} Y, A} \qquad \frac{\begin{matrix}\dots\\ B, C, D, X_0 \vdash_n Y\end{matrix}}{B, C\wedge D, X_0 \vdash_{n+1} Y}$$

die letzte Regel von H war ($\vee$ La):

$$\frac{C, A\rightarrow B, X_0 \vdash_n Y \qquad D, A\rightarrow B, X_0 \vdash_n Y}{C\vee D, A\rightarrow B, X_0 \vdash_{n+1} Y}\ (\vee\ La)$$

nach (IV) gilt:

$$\begin{array}{cccc} H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C, X_0 \vdash_n Y, A & B, C, X_0 \vdash_n Y & D, X_0 \vdash_n Y, A & B, D, X_0 \vdash_n Y \end{array}$$

dann gilt aber:

$$\begin{array}{cccc} H_1 & H_3 & H_2 & H_4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

$$\frac{C, X_0 \vdash_n Y, A \qquad D, X_0 \vdash_n Y, A}{C\vee D, X_0 \vdash_{n+1} Y, A} \qquad \frac{B, C, X_0 \vdash_n Y \qquad B, D, X_0 \vdash_n Y}{B, C\vee D, X_0 \vdash_{n+1} Y}\ (\vee\ La)$$

(v.3) wenn $A\rightarrow B, X \vdash_{n+1} Y$ kein Axiom ist und $A\rightarrow B$ Hauptformel ist, endet die Herleitung so:

$$\begin{array}{c} H \\ \ldots \end{array}$$

$$\frac{X \vdash_n Y, A \qquad B, X \vdash_n Y}{A\rightarrow B, X \vdash_{n+1} Y}\ (\rightarrow La)$$

und wir sind fertig.
Die restlichen Fälle verbleiben als ÜBUNG.

BEMERKUNG:
Ein Beweisversuch dieses Lemmas für S4 scheitert schon an den Axiomen, d.h. im Unterfall (v.1).

LEMMA 14:
Die Kürzungsregeln sind zulässig in S4a; es gilt sogar:
(i) $A, A, X \vdash_n Y \Rightarrow A, X \vdash_n Y$
(ii) $X \vdash_n Y, A, A \Rightarrow X \vdash_n Y, A$

BEWEIS:
Simultane Induktion nach n;
(i) wenn A nicht aktiv in der letzten Regel ist, wendet man (IV) auf die Prämisse(n) an;
wenn A aktiv in der letzten Regel ist, unterscheiden wir:
(i.1): die letzte Regel war ($\wedge$ L):

$$\begin{array}{c} H \\ \ldots \end{array}$$

$$\frac{A, B, A\wedge B, X \vdash_n Y}{A\wedge B, A\wedge B, X \vdash_{n+1} Y}\ (\wedge\ L)$$

nach dem Inversionslemma gibt es eine Herleitung

$$\begin{array}{c} H^* \\ \ldots \\ A, B, A, B, X \vdash_n Y \end{array}$$

auf den wir zweimal die (IV) anwenden können (i.2) die letzte Regel war ($\neg$ L):

$$\dfrac{\begin{matrix} H \\ \ldots \\ \neg A, X \vdash_n Y, A \end{matrix}}{\neg A, \neg A, X \vdash_{n+1} Y} \quad (\neg\ L)$$

nach dem Inversionslemma gibt es eine Herleitung

$$\begin{matrix} H^* \\ \ldots \\ X \vdash_n Y, A, A \end{matrix}$$

auf die wir die (IV) von (ii) anwenden können;
die restlichen Fälle verbleiben als ÜBUNG.

FOLGERUNG:
Nach Lemma 1 ist S4a = S2 und weiters ist S4a$^+$ adäquat bzgl. AL;
da nach Lemma 8 die Schnittregel (CUT) bzw. nach Lemma 9 auch (CUTa) zulässig in S4a ist, ist auch S4a$^+$ = S4a und S4a ist adäquat bzgl. AL; der Beweis der Schnittelimination kann direkt, analog zu S2, aber mit (CUT) anstelle von (MIX), geführt werden, wobei man (für spezielle Fälle) auch das Inversionslemma ausnützen kann.

Folgender semantischer BEWEIS für die Abgeschlossenheit von S4a unter (CUT) bzw. (CUTa) kann mit dem Tableaukalkül T1 aus Kapitel 3 geführt werden:

DEFINITION:
Eine Sequenz $X \vdash Y$ heißt gültig im Modell M, $M \models_{AL} (X \vdash Y)$, gdw nicht $M \models_{AL} A$ für ein $A \in X$ oder $M \models_{AL} B$ für ein $B \in Y$ (gdw bei jeder Zuordnung von Wahrheitswerten zu den Aussagenvariablen, bei der alle Antezedensformeln den Wert 1 erhalten, es mindestens eine Sukzedensformel gib, die auch den Wert 1 erhält).
$X \vdash Y$ heißt allgemeingültig, $\models_{AL} (X \vdash Y)$, gdw $M \models_{AL} (X \vdash Y)$ für alle Modelle M gilt.

LEMMA 15:
(i) $M \models_{AL} (X \vdash Y) \Leftrightarrow M \models_{AL} E(X \vdash Y)$
(ii) $\models_{AL} (X \vdash Y) \Leftrightarrow \models_{AL} E(X \vdash Y)$, d.h. $X \vdash Y$ ist allgemeingültig gdw die entsprechende Formel eine Tautologie ist

BEWEIS:
ÜBUNG

LEMMA 16:
Folgende Behauptungen sind äquivalent:
(i) $X \vdash Y$ ist ohne Anwendung von (CUT) herleitbar in S4a
(ii) $X \vdash Y$ ist herleitbar in S4a
(iii) $X \vdash Y$ ist allgemeingültig

BEWEIS:
(i) $\Rightarrow$ (ii): klar;
(ii) $\Rightarrow$ (iii): durch Herleitungsinduktion;
(iii) $\Rightarrow$ (i): mithilfe des Tableaukalküls T1, wobei man beobachtet, daß der Sequenzenkalkül im wesentlichen dem umgekehrten Tableaukalkül (ohne Schnittregel !!) entspricht.

FOLGERUNG:
$A \in$ TAU gdw $\vdash A$ herleitbar in S4a
daraus folgt insb. auch, daß S4a und alle damit äquivalenten Varianten widerspruchsfrei sind

BEMERKUNG:
Der Tableaukalkül ist also auch eine Methode zur Konstruktion von schnittfreien Herleitungen. Obiger semantischer Beweis zeigt jedoch nur die Abgeschlossenheit des Sequenzenkalküls unter der Schnittregel, und ist insofern nicht konstruktiv, da er im Gegensatz zu den syntaktischen Beweisen kein Verfahren liefert, aus einer Herleitung mit Anwendungen der Schnittregel eine solche ohne Anwendung der Schnittregel zu konstruieren.

FOLGERUNG (Satz über die Teilformeleigenschaft für S4a):
Ist H eine - schnittfreie - Herleitung der Sequenz $X \vdash Y$ in S4a, so sind alle in H vorkommenden Formeln Teilformeln von Formeln in X, Y.

BEWEIS:
Folgt sofort aus der Beschaffenheit der Regeln von S4a; diese Eigenschaft würde verloren gehen, wenn man die Schnittregel zum Kalkül hinzunimmt.

FOLGERUNG (Separierungseigenschaft für S4a):
Ist $X \vdash Y$ in S4a herleitbar, so gibt es eine Herleitung H von $X \vdash Y$, in der nur diejenigen Axiome und Schlussregeln angewendet werden, wo die entsprechenden Junktoren in $X \vdash Y$ vorkommen.

FOLGERUNG (Entscheidbarkeit der Aussagenlogik):
Die Aussagenlogik ist entscheidbar

BEWEIS:
Aus dem Satz über die Teilformeleigenschaft folgt weiters, daß jede Sequenz $X \vdash Y$ die Information über ihre eigene Herleitung enthält; denn es gibt ein effektives Verfahren, um von jeder Sequenz $X \vdash Y$ eine Herleitung von $X \vdash Y$ in S4a anzugeben: man verfolgt den zu suchenden Beweis von der herzuleitenden Sequenz zurück (wie bei der Tableaumethode), indem man alle möglichen Regelanwendungen durchprobiert; die zu suchenden Formeln werden dabei schrittweise in ihrer Komplexität abgebaut und die Kürzungsregeln brauchen dabei nicht angewendet zu werden !!

DEFINITION (Interpolationseigenschaft):
(i) $\vdash A \to B \Rightarrow$ es gibt ein C mit $\vdash A \to C$ und $\vdash C \to B$ und $\mathrm{Var}(C) \subseteq \mathrm{Var}(A) \cap \mathrm{Var}(B)$
(ii) $X, Y \vdash B \Rightarrow$ es gibt ein C mit $X \vdash C$ und $Y, C \vdash B$ und $\mathrm{Var}(C) \subseteq \mathrm{Var}(X) \cap \mathrm{Var}(Y, B)$
(iii) $X_1, X_2 \vdash Y_1, Y_2 \Rightarrow$ es gibt ein C mit $X_1 \vdash Y_1, C$ und $C, X_2 \vdash Y_2$ und
$\mathrm{Var}(C) \subseteq [\mathrm{Var}(X_1) \cup \mathrm{Var}(Y_1)] \cap [\mathrm{Var}(X_2) \cup \mathrm{Var}(Y_2)]$

BEMERKUNG:
(i) aus (ii) für $X = \{A\}$ und $Y = \emptyset$
(i) aus (iii) für $X_1 = \{A\}, X_2 = \emptyset, Y_1 = \emptyset, Y_2 = \{B\}$
(ii) aus (iii): $X_1 = X, X_2 = Y, Y_1 = \emptyset, Y_2 = \{B\}$

enthielte unsere Sprache kein $\bot$, müsste man (i) so formulieren:
(i*) $\vdash A \to B \Rightarrow A \vdash (\vdash \neg A)$ oder $\vdash B$ oder
es gibt ein C mit $\vdash A \to C$ und $\vdash C \to B$ und $Var(C) \subseteq Var(A) \cap Var(B)$
oft wird (i) auch so formuliert:
(i) $A \vdash B \Rightarrow$ es gibt ein C mit $A \vdash C$ und $C \vdash B$ und $Var(C) \subseteq Var(A) \cap Var(B)$

LEMMA 17:
S4a hat die Interpolationseigenschaft

BEWEIS:
Bemerkung: falls $A \vdash \varnothing$, wähle $C = \bot$; falls $\varnothing \vdash B$, wähle $C = \neg\bot$; wir beweisen nun (iii) durch Herleitungsinduktion in S4a, also ohne (CUT):
Induktionsanfang:
$p \vdash p$:
$p \in X_1 \cap Y_1$: $C = \bot$ ($p \vdash p, \bot$; $\bot \vdash$)
$p \in X_1 \cap Y_2$: $C = p$ ($p \vdash p$; $p \vdash p$)
$p \in X_2 \cap Y_1$: $C = \neg p$ ($\vdash p, \neg p$; $\neg p, p \vdash$)
$p \in X_2 \cap Y_2$: $C = \neg\bot$ ($\vdash \neg\bot$; $\neg\bot, p \vdash p$)
$\bot \vdash$:
$\bot \in X_1$: $C = \bot$ ($\bot \vdash \bot$; $\bot \vdash$)
$\bot \in X_2$: $C = \neg\bot$ ($\vdash \neg\bot$; $\neg\bot, \bot \vdash$)
Induktionsschritt:
Fall 1: die letzte Regel war ($\wedge$ L):

$$\frac{\begin{matrix} H \\ \vdots \\ A, B, X_1, X_2 \vdash Y_1, Y_2 \end{matrix}}{A \wedge B, X_1, X_2 \vdash Y_1, Y_2} \; (\wedge\ L)$$

Unterfall 1.1: sei $A \wedge B \in X_1$:
zu zeigen ist: es gibt ein C mit $Var(C) \subseteq Var(A \wedge B, X_1, Y_1) \cap Var(X_2, Y_2)$ und:
$A \wedge B, X_1 \vdash Y_1, C$ und $C, X_2 \vdash Y_2$
nach (IV) gibt es ein C* mit $Var(C^*) \subseteq Var(A, B, X_1, Y_1) \cap Var(X_2, Y_2)$ und:
$A, B, X_1 \vdash Y_1, C^*$ und $C^*, X_2 \vdash Y_2$
setze $C = C^*$
Unterfall 1.2: sei $A \wedge B \in X_2$:
zu zeigen ist: es gibt ein C mit $Var(C) \subseteq Var(X_1, Y_1) \cap Var(A \wedge B, X_2, Y_2)$ und:
$X_1 \vdash Y_1, C$ und $C, A \wedge B, X_2 \vdash Y_2$
nach (IV) gibt es ein C* mit $Var(C^*) \subseteq Var(X_1, Y_1) \cap Var(A, B, X_2, Y_2)$ und:
$X_1 \vdash Y_1, C$ und $C, A, B, X_2 \vdash Y_2$
setze $C = C^*$
Fall 2: die letzte Regel war ($\to$ La):

$$\frac{\begin{matrix} H \\ \vdots \\ X_1, X_2 \vdash Y_1, Y_2, A \end{matrix} \qquad \begin{matrix} K \\ \vdots \\ B, X_1, X_2 \vdash Y_1, Y_2 \end{matrix}}{A \to B, X_1, X_2 \vdash Y_1, Y_2} \; (\to La)$$

Unterfall 2.1: sei $A\rightarrow B \in X_1$:
zu zeigen ist: es gibt ein C mit $Var(C) \subseteq Var(A\rightarrow B, X_1, Y_1) \cap Var(X_2, Y_2)$ und:
$A\rightarrow B, X_1 \vdash Y_1, C$ und $C, X_2 \vdash Y_2$
Nach (IV) gibt es D und D* mit:
$X_1 \vdash Y_1, D, A$ und $D, X_2 \vdash Y_2$ und $Var(D) \subseteq Var(A, X_1, Y_1) \cap Var(X_2, Y_2)$
$B, X_1 \vdash Y_1, D^*$ und $D^*, X_2 \vdash Y_2$ und $Var(D^*) \subseteq Var(B, X_1, Y_1) \cap Var(X_2, Y_2)$
also gilt auch (mit (AB)):
$A\rightarrow B, X_1 \vdash Y_1, D, D^*$, also auch $A\rightarrow B, X_1 \vdash Y_1, D\vee D^*$, und $D\vee D^*, X_2 \vdash Y_2$
setze $C = D\vee D^*$
Unterfall 2.2: sei $A\rightarrow B \in X_2$:
zu zeigen ist: es gibt ein C mit $Var(C) \subseteq Var(X_1, Y_1) \cap Var(A\rightarrow B, X_2, Y_2)$ und:
$X_1 \vdash Y_1, C$ und $C, A\rightarrow B, X_2 \vdash Y_2$
nach (IV) gibt es D und D* mit:
$X_1 \vdash Y_1, D$ und $D, X_2 \vdash Y_2, A$ und $Var(D) \subseteq Var(X_1, Y_1) \cap Var(A, X_2, Y_2)$
$X_1 \vdash Y_1, D^*$ und $D^*, B, X_2 \vdash Y_2$ und $Var(D^*) \subseteq Var(X_1, Y_1) \cap Var(B, X_2, Y_2)$
also gilt auch (mit (AB)):
$X_1 \vdash Y_1, D\wedge D^*$, und $A\rightarrow B, D, D^*, X_2 \vdash Y_2$, also auch $A\rightarrow B, D\wedge D^*, X_2 \vdash Y_2$
setze $C = D\wedge D^*$
restliche Fälle: ÜBUNG

FOLGERUNG:
AL (syntaktisch für HF und semantisch) hat die Interpolationseigenschaft

DEFINITION (explizite und implizite Definierbarkeit):
Sei $X \subseteq WFF$, $q \in Var(X)$, $V' = Var(X) \setminus \{q\}$;
q heißt explizit definierbar in X gdw es eine Formel Q gibt mit $Var(Q) \subseteq V'$ und $X \models q\leftrightarrow Q$
q heißt implizit definierbar in X gdw für alle Modelle M, N mit $M \models X$ und $N \models X$ gilt:
ist $M \models p$ gdw $N \models p$ für alle $p \in V'$, so gilt auch $M \models q$ gdw $N \models q$

LEMMA 18 (Definierbarkeitssatz von Beth):
q ist explizit definierbar in X gdw q ist implizit definierbar in X

BEWEIS:
Siehe etwa Rautenberg (1979, 47ff).

Variante S4:

Sind X und Y endliche Multimengen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz

Axiome:

$X, p \vdash p, Y$ (AX)

$X, \bot \vdash Y$ ($\bot$ LL)

Schlussregeln:

Logische Regeln:

$$\frac{A, B, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y} \; (\wedge \text{ L}) \qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad Z \vdash U, B}{X, Z \vdash Y, U, A \wedge B} \; (\wedge \text{ R})$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, Z \vdash U}{A \vee B, X, Z \vdash Y, U} \; (\vee \text{ L}) \qquad \frac{X \vdash Y, A, B}{X \vdash Y, A \vee B} \; (\vee \text{ R})$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, Z \vdash U}{A \to B, X, Z \vdash Y, U} \; (\to \text{ L}) \qquad \frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \to B} \; (\to \text{ R})$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y} \; (\neg \text{ L}) \qquad \frac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A} \; (\neg \text{ R})$$

Variante S4a:

Sind X und Y endliche Multimengen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz

Axiome:

$X, p \vdash p, Y$ (AX)

$X, \bot \vdash Y$ ($\bot$ LL)

Schlussregeln:

Logische Regeln:

$$\frac{A, B, X \vdash Y}{A\wedge B, X \vdash Y}\ (\wedge\ L) \qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A\wedge B}\ (\wedge\ Ra)$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, X \vdash Y}{A\vee B, X \vdash Y}\ (\vee\ La) \qquad \frac{X \vdash Y, A, B}{X \vdash Y, A\vee B}\ (\vee\ R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, X \vdash Y}{A\to B, X \vdash Y}\ (\to La) \qquad \frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A\to B}\ (\to R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y}\ (\neg\ L) \qquad \frac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A}\ (\neg\ R)$$

4.1.9 Die Varianten S5, S5a, S6, S6a, S7 und S7a

Variante S5:

Sind X und Y endliche Multimengen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz

Axiome:

$p \vdash p$ (Ax)

$\bot \vdash$ ($\bot$ L)

Schlussregeln:
Logische Regeln:

$$\frac{A, B, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y} \ (\wedge\ L) \qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad Z \vdash U, B}{X, Z \vdash Y, U, A \wedge B} \ (\wedge\ R)$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, Z \vdash U}{A \vee B, X, Z \vdash Y, U} \ (\vee\ L) \qquad \frac{X \vdash Y, A, B}{X \vdash Y, A \vee B} \ (\vee\ R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, Z \vdash U}{A \to B, X, Z \vdash Y, U} \ (\to L) \qquad \frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \to B} \ (\to R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y} \ (\neg\ L) \qquad \frac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A} \ (\neg\ R)$$

Strukturschlussregeln:

$$\frac{X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \ (AB\ L) \qquad \frac{X \vdash Y}{X \vdash Y, A} \ (AB\ R)$$

LEMMA 19:
S5 ist korrekt, aber unvollständig und daher nicht adäquat

BEWEIS:
S5 ist klarerweise korrekt; es gilt: $X \vdash Y$ ist herleitbar in S5 $\Rightarrow$ $X \vdash Y$ ist herleitbar in S4, da S4 abgeschlossen unter den Abschwächungsregeln ist; da S4 unvollständig ist, folgt die Behauptung.

Variante S5a:

Sind X und Y endliche Multimengen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz

Axiome:

$p \vdash p$ (Ax)

$\bot \vdash$ $(\bot\ L)$

Schlussregeln:

Logische Regeln:

$$\frac{A, B, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y}\ (\wedge\ L) \qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \wedge B}\ (\wedge\ Ra)$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, X \vdash Y}{A \vee B, X \vdash Y}\ (\vee\ La) \qquad \frac{X \vdash Y, A, B}{X \vdash Y, A \vee B}\ (\vee\ R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, X \vdash Y}{A \rightarrow B, X \vdash Y}\ (\rightarrow La) \qquad \frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \rightarrow B}\ (\rightarrow R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y}\ (\neg\ L) \qquad \frac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A}\ (\neg\ R)$$

Strukturschlussregeln:

$$\frac{X \vdash Y}{A, X \vdash Y}\ (AB\ L) \qquad \frac{X \vdash Y}{X \vdash Y, A}\ (AB\ R)$$

LEMMA 20:
S5a ist adäquat

BEWEIS:
Es gilt: $X \vdash Y$ ist herleitbar in S4a $\Rightarrow$ $X \vdash Y$ ist herleitbar in S5a; da S4a vollständig und S5a korrekt ist, folgt die Behauptung.

Variante S6:

Sind X und Y endliche Multimengen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz

Axiome:

$p \vdash p$ (Ax)

$\bot \vdash$ ($\bot$ L)

Schlussregeln:

Logische Regeln:

$$\frac{A, X \vdash Y}{A\wedge B, X \vdash Y} \quad (\wedge \text{ L1}) \qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad Z \vdash U, B}{X, Z \vdash Y, U, A\wedge B} \quad (\wedge \text{ R})$$

$$\frac{B, X \vdash Y}{A\wedge B, X \vdash Y} \quad (\wedge \text{ L2})$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, Z \vdash U}{A\vee B, X, Z \vdash Y, U} \quad (\vee \text{ L}) \qquad \frac{X \vdash Y, A}{X \vdash Y, A\vee B} \quad (\vee \text{ R1})$$

$$\frac{X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A\vee B} \quad (\vee \text{ R2})$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, Z \vdash U}{A\to B, X, Z \vdash Y, U} \quad (\to \text{ L}) \qquad \frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A\to B} \quad (\to \text{ R})$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y} \quad (\neg \text{ L}) \qquad \frac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A} \quad (\neg \text{ R})$$

Strukturschlussregeln:

$$\frac{X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \quad (\text{AB L}) \qquad \frac{X \vdash Y}{X \vdash Y, A} \quad (\text{AB R})$$

LEMMA 21:
S6 ist korrekt, aber unvollständig und daher nicht adäquat

BEWEIS:
S6 ist klarerweise korrekt; es gilt: $X \vdash Y$ ist herleitbar in S6 $\Rightarrow$ $X \vdash Y$ ist herleitbar in S4, da S4 abgeschlossen unter den Abschwächungsregeln ist; deshalb sind auch nach Lemma 2 ($\wedge$ L1), ($\wedge$ L2), ($\vee$ R1) und ($\vee$ R2) zulässig in S4; da S4 unvollständig ist, folgt die Behauptung.

Variante S6a:

Sind X und Y endliche Multimengen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz

Axiome:

$p \vdash p$ (Ax)

$\bot \vdash$ ($\bot$ L)

Schlussregeln:

Logische Regeln:

$$\frac{A, X \vdash Y}{A\wedge B, X \vdash Y}\ (\wedge\ L1) \qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A\wedge B}\ (\wedge\ Ra)$$

$$\frac{B, X \vdash Y}{A\wedge B, X \vdash Y}\ (\wedge\ L2)$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, X \vdash Y}{A\vee B, X \vdash Y}\ (\vee\ La) \qquad \frac{X \vdash Y, A}{X \vdash Y, A\vee B}\ (\vee\ R1)$$

$$\frac{X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A\vee B}\ (\vee\ R2)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, X \vdash Y}{A\rightarrow B, X \vdash Y}\ (\rightarrow La) \qquad \frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A\rightarrow B}\ (\rightarrow R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y}\ (\neg\ L) \qquad \frac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A}\ (\neg\ R)$$

Strukturschlussregeln:

$$\frac{X \vdash Y}{A, X \vdash Y}\ (AB\ L) \qquad \frac{X \vdash Y}{X \vdash Y, A}\ (AB\ R)$$

LEMMA 22:
S6a ist adäquat

BEWEIS:
S6a ist klarerweise korrekt; S6a ist aber auch vollständig, da sich die Beweise von Lemma 3 bzw. 6 von S2a auf S6a übertragen lassen, da dort keine Kürzungsregeln verwendet wurden.

Variante S7:

Sind X und Y endliche Multimengen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz

Axiome:

$p \vdash p$ (Ax)

$\bot \vdash$ ($\bot$ L)

Schlussregeln:

Logische Regeln:

$\dfrac{A, B, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y}$ ($\wedge$ L) $\qquad$ $\dfrac{X \vdash Y, A \qquad Z \vdash U, B}{X, Z \vdash Y, U, A \wedge B}$ ($\wedge$ R)

$\dfrac{A, X \vdash Y \qquad B, Z \vdash U}{A \vee B, X, Z \vdash Y, U}$ ($\vee$ L) $\qquad$ $\dfrac{X \vdash Y, A, B}{X \vdash Y, A \vee B}$ ($\vee$ R)

$\dfrac{X \vdash Y, A \qquad B, Z \vdash U}{A \to B, X, Z \vdash Y, U}$ ($\to$ L) $\qquad$ $\dfrac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \to B}$ ($\to$ R)

$\dfrac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y}$ ($\neg$ L) $\qquad$ $\dfrac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A}$ ($\neg$ R)

Strukturschlussregeln:

$\dfrac{X \vdash Y}{A, X \vdash Y}$ (AB L) $\qquad$ $\dfrac{X \vdash Y}{X \vdash Y, A}$ (AB R)

$\dfrac{A, A, X \vdash Y}{A, X \vdash Y}$ (KÜ L) $\qquad$ $\dfrac{X \vdash Y, A, A}{X \vdash Y, A}$ (KÜ R)

LEMMA 23:
S7 ist adäquat

BEWEIS:
Es gilt: $X \vdash Y$ ist herleitbar in S4a $\Rightarrow$ $X \vdash Y$ ist herleitbar in S7; da S4a vollständig und S7 korrekt ist, folgt die Behauptung.

Variante S7a:

Sind X und Y endliche Multimengen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz

Axiome:

$p \vdash p$ (Ax)

$\bot \vdash$ ($\bot$ L)

Schlussregeln:

Logische Regeln:

$$\frac{A, B, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y} \ (\wedge\ \mathrm{L}) \qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \wedge B} \ (\wedge\ \mathrm{Ra})$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, X \vdash Y}{A \vee B, X \vdash Y} \ (\vee\ \mathrm{La}) \qquad \frac{X \vdash Y, A, B}{X \vdash Y, A \vee B} \ (\vee\ \mathrm{R})$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, X \vdash Y}{A \to B, X \vdash Y} \ (\to\ \mathrm{La}) \qquad \frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \to B} \ (\to\ \mathrm{R})$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y} \ (\neg\ \mathrm{L}) \qquad \frac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A} \ (\neg\ \mathrm{R})$$

Strukturschlussregeln:

$$\frac{X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \ (\mathrm{AB\ L}) \qquad \frac{X \vdash Y}{X \vdash Y, A} \ (\mathrm{AB\ R})$$

$$\frac{A, A, X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \ (\mathrm{KÜ\ L}) \qquad \frac{X \vdash Y, A, A}{X \vdash Y, A} \ (\mathrm{KÜ\ R})$$

BEMERKUNG:

S7a wird verwendet von: Buss (1998), in der Signatur $\{\neg, \wedge, \vee, \to\}$, mit Folgen statt Multimengen; Czermak: Logik. Vorlesungsskriptum, in der Signatur $\{\neg, \wedge, \vee, \to\}$, mit Folgen statt Multimengen, (Ax*) statt (Ax) und ($\to$ La) modifiziert (rechts verschiedener Kontext).

LEMMA 24:

S7a ist adäquat

BEWEIS:

Es gilt: $X \vdash Y$ ist herleitbar in S4a $\Rightarrow$ $X \vdash Y$ ist herleitbar in S7a; da S4a vollständig und S7a korrekt ist, folgt die Behauptung.

4.1.10 Die Variante $\mathcal{S}_{\mathrm{MM}}$

Diese Multimengen-Supervariante enthält als Axiome Sequenzen der Gestalt A $\vdash$ A, zumindest alle Sequenzen der Form p $\vdash$ p, und $\bot \vdash \emptyset$;
als Regeln enthält sie alle Regeln aus 4.1.1 bis auf die Vertauschungsregeln und die vier Versionen der Schnittregel.
$\mathcal{S}_{\mathrm{MM}}{}^{+}$ sei $\mathcal{S}_{\mathrm{MM}}$ + (CUT), $\mathcal{S}_{\mathrm{MM}}{}^{y}$ sei $\mathcal{S}_{\mathrm{MM}}$ + (CUTy) für y = a, b, c.

LEMMA 25:
(i) $\mathcal{S}_{\mathrm{MM}}$ ist adäquat bzgl. AL;
(ii) Der Schnitteliminationssatz gilt für $\mathcal{S}_{\mathrm{MM}}{}^{+}$ und $\mathcal{S}_{\mathrm{MM}}{}^{y}$ (y = a, b, c).

BEWEIS:
(i) klar;
(ii) folgt aus Lemma 8 bzw. Lemma 9; auch wenn man zwei, drei oder vier Versionen der Schnittregel zu $\mathcal{S}_{\mathrm{MM}}$ hinzunimmt, kann man ohne Anwendungen derselben auskommen.

4.1.11 Die Varianten S8, S8a, S9, S9a und $\mathcal{S}_{\mathrm{M}}$

Abschliessend behandeln wir noch einige Sequenzenkalküle in der Mengenformulierung; in dieser Formulierung sind bereits die Kürzungsregeln implizit enthalten.
Der Einfachheit halber betrachten wir nur mehr diejenigen Varianten, die die Abschwächungsregeln explizit enthalten, u.z. S8, S8a, S9 und S9a (Beschreibung weiter unten).
Die Mengen-Supervariante $\mathcal{S}_{\mathrm{M}}$ enthält als Axiome Sequenzen der Gestalt A $\vdash$ A, zumindest alle Sequenzen der Form p $\vdash$ p, und $\perp \vdash \emptyset$;
als Regeln enthält sie alle Regeln aus 4.1.1 bis auf die Kürzungs- und Vertauschungsregeln und die vier Versionen der Schnittregel.

LEMMA 26:
Die Varianten S8, S8a, S9, S9a und $\mathcal{S}_{\mathrm{M}}$ sind adäquat

BEWEIS:
Es gelten folgende Entsprechungen zwischen Mengen- und adäquaten Multimengenvarianten:
S8 entspricht S7,
S8a entspricht S7a,
S9 entspricht S2,
S9a entspricht S2a;
$\mathcal{S}_{\mathrm{M}}$ entspricht $\mathcal{S}_{\mathrm{MM}}$

Variante S8 (Version 2):

Sind X und Y endliche Mengen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz

Axiome:

$p \vdash p$ (Ax)

$\bot \vdash$ ($\bot$ L)

Schlussregeln:

Logische Regeln:

$$\frac{A, B, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y} \ (\wedge\ L) \qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad Z \vdash U, B}{X, Z \vdash Y, U, A \wedge B} \ (\wedge\ R)$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, Z \vdash U}{A \vee B, X, Z \vdash Y, U} \ (\vee\ L) \qquad \frac{X \vdash Y, A, B}{X \vdash Y, A \vee B} \ (\vee\ R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, Z \vdash U}{A \rightarrow B, X, Z \vdash Y, U} \ (\rightarrow L) \qquad \frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \rightarrow B} \ (\rightarrow R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y} \ (\neg\ L) \qquad \frac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A} \ (\neg\ R)$$

Strukturschlussregeln:

$$\frac{X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \ (AB\ L) \qquad \frac{X \vdash Y}{X \vdash Y, A} \ (AB\ R)$$

Variante S8a (Version 1):

Sind X und Y endliche Mengen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz

Axiome:

$p \vdash p$ (Ax)

$\bot \vdash$ ($\bot$ L)

Schlussregeln:

Logische Regeln:

$$\frac{A, B, X \vdash Y}{A \land B, X \vdash Y} \; (\land\ L) \qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \land B} \; (\land\ Ra)$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, X \vdash Y}{A \lor B, X \vdash Y} \; (\lor\ La) \qquad \frac{X \vdash Y, A, B}{X \vdash Y, A \lor B} \; (\lor\ R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, X \vdash Y}{A \to B, X \vdash Y} \; (\to La) \qquad \frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \to B} \; (\to R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y} \; (\neg\ L) \qquad \frac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A} \; (\neg\ R)$$

Strukturschlussregeln:

$$\frac{X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \; (AB\ L) \qquad \frac{X \vdash Y}{X \vdash Y, A} \; (AB\ R)$$

Variante S9:

Sind X und Y endliche Mengen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz

Axiome:

$p \vdash p$ (Ax)

$\bot \vdash$ ($\bot$ L)

Schlussregeln:

Logische Regeln:

$$\frac{A, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y} \quad (\wedge\ L1) \qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad Z \vdash U, B}{X, Z \vdash Y, U, A \wedge B} \quad (\wedge\ R)$$

$$\frac{B, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y} \quad (\wedge\ L2)$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, Z \vdash U}{A \vee B, X, Z \vdash Y, U} \quad (\vee\ L) \qquad \frac{X \vdash Y, A}{X \vdash Y, A \vee B} \quad (\vee\ R1)$$

$$\frac{X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \vee B} \quad (\vee\ R2)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, Z \vdash U}{A \rightarrow B, X, Z \vdash Y, U} \quad (\rightarrow L) \qquad \frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \rightarrow B} \quad (\rightarrow R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y} \quad (\neg\ L) \qquad \frac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A} \quad (\neg\ R)$$

Strukturschlussregeln:

$$\frac{X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \quad (AB\ L) \qquad \frac{X \vdash Y}{X \vdash Y, A} \quad (AB\ R)$$

Variante S9a:

Sind X und Y endliche Mengen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz

Axiome:

$p \vdash p$ (Ax)

$\bot \vdash$ ($\bot$ L)

Schlussregeln:

Logische Regeln:

$$\frac{A, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y} \quad (\wedge\ L1) \qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \wedge B} \quad (\wedge\ Ra)$$

$$\frac{B, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y} \quad (\wedge\ L2)$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, X \vdash Y}{A \vee B, X \vdash Y} \quad (\vee\ La) \qquad \frac{X \vdash Y, A}{X \vdash Y, A \vee B} \quad (\vee\ R1)$$

$$\frac{X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \vee B} \quad (\vee\ R2)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, X \vdash Y}{A \to B, X \vdash Y} \quad (\to La) \qquad \frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \to B} \quad (\to R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y} \quad (\neg\ L) \qquad \frac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A} \quad (\neg\ R)$$

Strukturschlussregeln:

$$\frac{X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \quad (AB\ L) \qquad \frac{X \vdash Y}{X \vdash Y, A} \quad (AB\ R)$$

4.1.12 Die Varianten S10 und S10a

Zum Abschluss noch zwei etwas ungewöhnliche Varianten mit zum Teil neuen Regeln, der Einfachheit halber in der Mengenformulierung:

Variante S10:

Sind X und Y endliche Mengen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz

Axiome:

$p \vdash p$	(Ax)
$\neg p, p \vdash$	(Ax L)
$\vdash p, \neg p$	(Ax R)
$\bot \vdash$	($\bot$ L)
$\vdash \neg\bot$	($\top$ R)

Schlussregeln:
Logische Regeln:

$$\frac{A, B, X \vdash Y}{A\wedge B, X \vdash Y}\ (\wedge\ L) \qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad Z \vdash U, B}{X, Z \vdash Y, U, A\wedge B}\ (\wedge\ R)$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, Z \vdash U}{A\vee B, X, Z \vdash Y, U}\ (\vee\ L) \qquad \frac{X \vdash Y, A, B}{X \vdash Y, A\vee B}\ (\vee\ R)$$

$$\frac{\neg A, X \vdash Y \qquad B, Z \vdash U}{A\rightarrow B, X, Z \vdash Y, U}\ (\rightarrow L^*) \qquad \frac{X \vdash Y, \neg A, B}{X \vdash Y, A\rightarrow B}\ (\rightarrow R^*)$$

$$\frac{A, X \vdash Y}{\neg\neg A, X \vdash Y}\ (\neg\neg L) \qquad \frac{X \vdash Y, A}{X \vdash Y, \neg\neg A}\ (\neg\neg R)$$

$$\frac{\neg A, X \vdash Y \qquad \neg B, Z \vdash U}{\neg(A\wedge B), X, Z \vdash Y, U}\ (\neg\wedge\ L) \qquad \frac{X \vdash Y, \neg A, \neg B}{X \vdash Y, \neg(A\wedge B)}\ (\neg\wedge\ R)$$

$$\frac{\neg A, \neg B, X \vdash Y}{\neg(A\vee B), X \vdash Y}\ (\neg\vee\ L) \qquad \frac{X \vdash Y, \neg A \qquad Z \vdash U, \neg B}{X, Z \vdash Y, U, \neg(A\vee B)}\ (\neg\vee\ R)$$

$$\frac{A, \neg B, X \vdash Y}{\neg(A\rightarrow B), X \vdash Y}\ (\neg\!\rightarrow L) \qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad Z \vdash U, \neg B}{X \vdash Y, \neg(A\rightarrow B)}\ (\neg\!\rightarrow R)$$

Strukturschlussregeln:

$$\frac{X \vdash Y}{A, X \vdash Y}\ (\text{AB L}) \qquad \frac{X \vdash Y}{X \vdash Y, A}\ (\text{AB R})$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad A, Z \vdash U}{X, Z \vdash Y, U}\ (\text{CUT})$$

Variante S10a:

Sind X und Y endliche Mengen von Formeln, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz

Axiome:

$p \vdash p$	(Ax)
$\neg p, p \vdash$	(Ax L)
$\vdash p, \neg p$	(Ax R)
$\bot \vdash$	($\bot$ L)
$\vdash \neg\bot$	($\top$ R)

Schlussregeln:
Logische Regeln:

$$\frac{A, B, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y} \; (\wedge \text{ L}) \qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \wedge B} \; (\wedge \text{ Ra})$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, X \vdash Y}{A \vee B, X \vdash Y} \; (\vee \text{ La}) \qquad \frac{X \vdash Y, A, B}{X \vdash Y, A \vee B} \; (\vee \text{ R})$$

$$\frac{\neg A, X \vdash Y \qquad B, X \vdash Y}{A \to B, X \vdash Y} \; (\to \text{ L*a}) \qquad \frac{X \vdash Y, \neg A, B}{X \vdash Y, A \to B} \; (\to \text{ R*})$$

$$\frac{A, X \vdash Y}{\neg\neg A, X \vdash Y} \; (\neg\neg\text{L}) \qquad \frac{X \vdash Y, A}{X \vdash Y, \neg\neg A} \; (\neg\neg\text{R})$$

$$\frac{\neg A, X \vdash Y \qquad \neg B, X \vdash Y}{\neg(A \wedge B), X \vdash Y} \; (\neg\wedge \text{ La}) \qquad \frac{X \vdash Y, \neg A, \neg B}{X \vdash Y, \neg(A \wedge B)} \; (\neg\wedge \text{ R})$$

$$\frac{\neg A, \neg B, X \vdash Y}{\neg(A \vee B), X \vdash Y} \; (\neg\vee \text{ L}) \qquad \frac{X \vdash Y, \neg A \qquad X \vdash Y, \neg B}{X \vdash Y, \neg(A \vee B)} \; (\neg\vee \text{ Ra})$$

$$\frac{A, \neg B, X \vdash Y}{\neg(A \to B), X \vdash Y} \; (\neg\to \text{ L}) \qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad X \vdash Y, \neg B}{X \vdash Y, \neg(A \to B)} \; (\neg\to \text{ Ra})$$

Strukturschlussregeln:

$$\frac{X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \; (\text{AB L}) \qquad \frac{X \vdash Y}{X \vdash Y, A} \; (\text{AB R})$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad A, X \vdash Y}{X \vdash Y} \; (\text{CUTa})$$

BEMERKUNG:
Auf diese Kalküle aufmerksam gemacht wurde ich durch Takano (1996).

BEMERKUNG:
S10 und S10a sind äquivalent

LEMMA 27:
In S10 sind folgende Sequenzen herleitbar:

$A \vdash A$	(Ax*)
$\neg A, A \vdash$	(Ax L*)
$\vdash A, \neg A$	(Ax R*)

BEWEIS:
Durch simultane Induktion nach g(A):
g(A)=0:
A=p: Axiome
A=⊥:

$$\dfrac{\bot \vdash}{\bot \vdash \bot} \qquad \dfrac{\bot \vdash}{\neg\bot, \bot \vdash} \qquad \dfrac{\vdash \neg\bot}{\vdash \bot, \neg\bot}$$

($\bot$ L), ($\top$ R)
(AB R), (AB L), (AB R)

g(A)>0:
A:=¬B: nach (IV) sind $B \vdash B$, $\neg B, B \vdash$ und $\vdash B, \neg B$ herleitbar;

$$\dfrac{\neg B, B \vdash \qquad \vdash B, \neg B}{\neg B \vdash \neg B}\,(\text{CUT}) \qquad \dfrac{\neg B, B \vdash}{\neg\neg B, \neg B \vdash}\,(\neg\neg\ \text{L}) \qquad \dfrac{\vdash B, \neg B}{\vdash \neg B, \neg\neg B}\,(\neg\neg\ \text{R})$$

nun seien nach (IV) folgende Sequenzen herleitbar:
$B \vdash B$, $\neg B, B \vdash$ und $\vdash B, \neg B$, $C \vdash C$, $\neg C, C \vdash$ und $\vdash C, \neg C$;
A:=B∧C: z.z.: $B\wedge C \vdash B\wedge C$, $\neg(B\wedge C), B\wedge C \vdash$ und $\vdash B\wedge C, \neg(B\wedge C)$ sind herleitbar:

$$\dfrac{\dfrac{B \vdash B \qquad C \vdash C}{B, C \vdash B\wedge C}\,(\wedge\ \text{R})}{B\wedge C \vdash B\wedge C}\,(\wedge\ \text{L})$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg B, B \vdash \qquad \neg C, C \vdash}{\neg(B\wedge C), B, C \vdash}\,(\neg\wedge\ \text{L})}{\neg(B\wedge C), B\wedge C \vdash}\,(\wedge\ \text{L})$$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash B, \neg B \qquad \vdash C, \neg C}{\vdash B\wedge C, \neg B, \neg C}\,(\wedge\ \text{R})}{\vdash B\wedge C, \neg(B\wedge C)}\,(\neg\wedge\ \text{R})$$

A:= B∨C: z.z.: $B\vee C \vdash B\vee C$, $\neg(B\vee C), B\vee C \vdash$ und $\vdash B\vee C, \neg(B\vee C)$ sind herleitbar:

$$\dfrac{\dfrac{B \vdash B \qquad C \vdash C}{B\vee C \vdash B, C}\,(\vee\ \text{L})}{B\vee C \vdash B\vee C}\,(\vee\ \text{R})$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg B, B \vdash \qquad \neg C, C \vdash}{\neg B, \neg C, B\vee C \vdash}\,(\vee\ \text{L})}{\neg(B\vee C), B\vee C \vdash}\,(\neg\vee\ \text{L})$$

$\underline{\vdash B, \neg B \qquad \vdash C, \neg C}$
$\underline{\vdash B, C, \neg(B\lor C)}$ $(\neg\lor R)$
$\vdash B\lor C, \neg(B\lor C)$ $(\lor R)$

A:= $B\to C$: z.z.: $B\to C \vdash B\to C$, $\neg(B\to C), B\to C \vdash$ und $\vdash B\to C, \neg(B\to C)$ sind herleitbar:
$\underline{\neg B \vdash \neg B \qquad C \vdash C}$
$\underline{B\to C \vdash \neg B, C}$ $(\to L^*)$
$B\to C \vdash B\to C$ $(\to R^*)$

$\underline{B, \neg B \vdash \qquad \neg C, C \vdash}$
$\underline{B, \neg C, B\to C \vdash}$ $(\to L^*)$
$\neg(B\to C), B\to C \vdash$ $(\neg\to L)$

$\underline{\vdash \neg B, B \qquad \vdash C, \neg C}$
$\underline{\vdash \neg B, C\ \neg(B\to C)}$ $(\neg\to R)$
$\vdash B\to C, \neg(B\to C)$ $(\to R^*)$

LEMMA 28:
S10 ist adäquat

BEWEIS:
S10 ist klarerweise korrekt; S10 ist aber auch vollständig, wie folgende Herleitungen zeigen:
Induktionsanfang:
Ax1: $\vdash A\to(B\to A)$:
$\underline{\vdash A, \neg A}$ (Ax R*)
$\underline{\vdash A, \neg A, \neg B}$ (AB R)
$\underline{\vdash \neg A, B\to A}$ $(\to R^*)$
$\vdash A\to(B\to A)$ $(\to R^*)$

Ax2: $\vdash (A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$:
$\underline{\vdash B, \neg B \qquad \vdash \neg C, C}$ (Ax R*)
$\underline{\vdash A, \neg A \qquad \vdash \neg(B\to C)), \neg B, C}$ (Ax R*), $(\neg\to R)$
$\underline{\vdash A, \neg A \qquad \vdash \neg(B\to C)), \neg(A\to B), \neg A, C}$ (Ax R*), $(\neg\to R)$
$\underline{\vdash \neg(A\to(B\to C)), \neg(A\to B), \neg A, C}$ $(\neg\to R)$
$\underline{\vdash \neg(A\to(B\to C)), \neg(A\to B), (A\to C)}$ $(\to R^*)$
$\underline{\vdash \neg(A\to(B\to C)), ((A\to B)\to(A\to C))}$ $(\to R^*)$
$\vdash (A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$ $(\to R^*)$

Ax3a: $\vdash A\land B\to A$:
$\underline{\vdash \neg A, A}$ (Ax R*)
$\underline{\vdash \neg A, \neg B, A}$ (AB R)
$\underline{\vdash \neg(A\land B), A}$ $(\neg\land R)$
$\vdash A\land B\to A$ $(\to R^*)$

Ax3b: $\vdash A\land B\to B$: analog

Ax4: $\vdash (A\to B)\to((A\to C)\to(A\to B\wedge C))$:

$\underline{\vdash A, \neg A \qquad \vdash B, \neg B}$	$\underline{\vdash A, \neg A \qquad \vdash C, \neg C}$	(Ax R*)
$\underline{\vdash \neg(A\to B), \neg A, B}$	$\underline{\vdash \neg(A\to C), \neg A, C}$	($\neg\to$ R)
$\underline{\vdash \neg(A\to B), \neg(A\to C), \neg A, B\wedge C}$		($\wedge$ R)
$\underline{\vdash \neg(A\to B), \neg(A\to C), A\to B\wedge C}$		($\to$ R*)
$\underline{\vdash \neg(A\to B), (A\to C)\to(A\to B\wedge C)}$		($\to$ R*)
$\vdash (A\to B)\to((A\to C)\to(A\to B\wedge C))$		($\to$ R*)

Ax5a: $\vdash A\to A\vee B$:

$\underline{\vdash A, \neg A}$	(Ax R*)
$\underline{\vdash A, \neg A, B}$	(AB R)
$\underline{\vdash \neg A, A\vee B}$	($\vee$ R)
$\vdash A\to A\vee B$	($\to$ R*)

Ax5b: $\vdash B\to A\vee B$: analog

Ax6: $\vdash (A\to C)\to((B\to C)\to(A\vee B\to C))$:

$\underline{\vdash A, \neg A \qquad \vdash C, \neg C}$	$\underline{\vdash B, \neg B \qquad \vdash C, \neg C}$	(Ax R*)
$\underline{\vdash \neg(A\to C), \neg A, C}$	$\underline{\vdash \neg(B\to C), \neg B, C}$	($\neg\to$ R)
$\underline{\vdash \neg(A\to C), \neg(B\to C), \neg(A\vee B), C}$		($\neg\vee$ R)
$\underline{\vdash \neg(A\to C), \neg(B\to C), A\vee B\to C}$		($\to$ R*)
$\underline{\vdash \neg(A\to C), (B\to C)\to(A\vee B\to C)}$		($\to$ R*)
$\vdash (A\to C)\to((B\to C)\to(A\vee B\to C))$		($\to$ R*)

Ax7: $\vdash ((A\to\neg B)\to((A\to B)\to\neg A))$:

	$\underline{\vdash A, \neg A \qquad \vdash \neg\neg B, \neg B}$	(Ax R*)
$\underline{\vdash A, \neg A}$	$\underline{\vdash \neg\neg B, \neg(A\to B), \neg A}$	(Ax R*), ($\neg\to$ R)
$\underline{\vdash \neg(A\to\neg B), \neg(A\to B), \neg A}$		($\neg\to$ R)
$\underline{\vdash \neg(A\to\neg B), (A\to B)\to\neg A}$		($\to$ R*)
$\vdash ((A\to\neg B)\to((A\to B)\to\neg A))$		($\to$ R*)

Ax8: $\vdash \neg\neg A\to A$:

$\underline{\vdash \neg A, A}$	(Ax R*)
$\underline{\vdash \neg\neg\neg A, A}$	($\neg\neg$ R)
$\vdash \neg\neg A\to A$	($\to$ R*)

Ax9: $\vdash ((A\to\bot)\to\bot)\to A$:

$\underline{\vdash A, \neg A}$		(Ax R*)
$\underline{\vdash A, \neg A, \bot}$		(AB R)
$\underline{\vdash A\to\bot, A}$	$\underline{\vdash \neg\bot}$	($\to$ R*), ($\top$ R)
$\underline{\vdash \neg((A\to\bot)\to\bot), A}$		($\neg\to$ R)
$\vdash ((A\to\bot)\to\bot)\to A$		($\to$ R*)

Induktionsschritt:
Es seien $\vdash A$ und $\vdash A \rightarrow B$ herleitbar:

$$\frac{\neg A, A \vdash \qquad\qquad B \vdash B}{A, A \rightarrow B \vdash B} \qquad \begin{array}{l}\text{(Ax L*), (Ax *)}\\ (\rightarrow \text{L*})\end{array}$$

daraus folgt mit zweimal (CUT) die Behauptung.

BEMERKUNG:
Die Regeln der linken Spalte von S10 entsprechen den Regeln des Tableaukalküls T2; die Regeln der rechten Spalte von S10 – die zur Herleitung der Axiome ausschliesslich verwendet wurden – entsprechen den Regeln eines Tableaukalküls T2*, wobei man ausgehend von der ersten Variante T1 des Tableaukalküls alle Formeln auf die rechte Seite des Striches bringt (diejenige Seite, auf der die falschen Formeln stehen); dann transformieren sich die 8 ursprünglichen Regeln von T1 in diese 7 Regeln von S6.

LEMMA 29:
Für S10* gilt die Schnittelimination, wobei S10* aus S10 hervorgeht, indem man (Ax), (Ax L) und (Ax R) durch (Ax*), (Ax L*) und (Ax R*) ersetzt.

BEWEIS:
ÜBUNG

4.2 Modale Sequenzenkalküle

Wie wir am Beispiel von S4a gesehen haben, sind Tableaukalküle auf den Kopf gestellte Sequenzenkalküle bzw. umgekehrt. Dies bedeutet, daß wir modale Sequenzenkalküle dadurch erhalten können, indem wir eine vollständige aussagenlogische Basis nehmen und mit modalen Regeln ergänzen, die den umgekehrten Tableauregeln für eine bestimmte Modallogik entsprechen.
So enthalten die in Kapitel 3 betrachteten Systeme **K**, **K4**, **T**, **S4** und **G** zusätzlich zu den aussagenlogischen Regeln folgende modale Regeln:

K: $\dfrac{X \vdash A}{\Box X \vdash \Box A}$ (K)

K4: $\dfrac{X,\ \ X \vdash A}{X \vdash\ \ A}$ (K4)

T: $\dfrac{X \vdash A}{X \vdash\ \ A}$ (K) $\dfrac{X, A,\ \ A \vdash Y}{X,\ \ A \vdash Y}$ (T)

S4: $\dfrac{X \vdash A}{X \vdash\ \ A}$ (S4) $\dfrac{X, A,\ \ A \vdash Y}{X,\ \ A \vdash Y}$ (T)

G: $\dfrac{X,\ \ X,\ \ A \vdash A}{X \vdash\ \ A}$ (G)

Hier ist es nicht mehr der Fall, daß es für den Notwendigkeitsoperator □ Regeln zur Einführung von □ sowohl links als auch rechts vom Sequenzenzeichen gibt; diese in der Aussagenlogik geltende Symmetrie ist hier zerstört, denn die Regel (K) beispielsweise führt □ gleichzeitig links und rechts vom Sequenzenzeichen ein.

Der Beweis des Schnitteliminationssatzes kann für Modallogiken auch syntaktisch geführt werden, obgleich es mehr Modallogiken gibt, für die die Abgeschlossenheit unter (CUT) mithilfe der Tableaumethode aus Kapitel 3 gezeigt wurde.
Für **K** etwa ergänzt man den aussagenlogischen Beweis um folgenden Fall 9.5:
eine Herleitung:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}H_1\\ \ldots\\ X \vdash A\end{array}}{\Box X \vdash \Box A} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}H_2\\ \ldots\\ A, Y \vdash B\end{array}}{\Box A, \Box Y \vdash \Box B}\ (K)}{\Box X, \Box Y \vdash \Box B}\ (CUT)$$

transformiert sich in:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}H_1\\ \ldots\\ X \vdash A\end{array} \qquad \begin{array}{c}H_2\\ \ldots\\ A, Y \vdash B\end{array}}{X, Y \vdash B}\ (CUT)}{\Box X, \Box Y \vdash \Box B}\ (K)$$

4.3 Klassische Prädikatenlogik

Abschliessend einige kurze Bemerkungen zur Prädikatenlogik PL. Diese erhält man erstens, indem man zu S2 folgende Regeln hinzufügt:

$\dfrac{A(t), X \vdash Y}{\forall x A(x), X \vdash Y}$	$(\forall$ L)	$\dfrac{X \vdash Y, A(a)}{X \vdash Y, \forall x A(x)}$	$(\forall$ R) mit (VB)
$\dfrac{A(a), X \vdash Y}{\exists x A(x), X \vdash Y}$	$(\exists$ L) mit (VB)	$\dfrac{X \vdash Y, A(t)}{X \vdash Y, \exists x A(x)}$	$(\exists$ R)

Dabei ist t ein beliebiger Term und die Variablenbedingung (VB) lautet: die freie Variable a kommt unter dem Strich nicht mehr vor.

Zweitens erhält man sie, indem man zu S4a folgende Regeln hinzufügt:

$\dfrac{\forall x A(x), A(t), X \vdash Y}{\forall x A(x), X \vdash Y}$	$(\forall$ L*)	$\dfrac{X \vdash Y, A(a)}{X \vdash Y, \forall x A(x)}$	$(\forall$ R) mit (VB)
$\dfrac{A(a), X \vdash Y}{\exists x A(x), X \vdash Y}$	$(\exists$ L) mit (VB)	$\dfrac{X \vdash Y, A(t)}{X \vdash Y, \exists x A(x)}$	$(\exists$ R)

BEMERKUNG:
In $(\forall$ L*) ist (KÜ L) implizit enthalten.

Übungen zu Kapitel 4:

1 Beweisen Sie (Teile von) Lemma 7 (für $S2^{+}$).

2 Beweisen Sie die restlichen Fälle des Schnitteliminationssatzes (für $S2^{+}$).

3 Zeigen Sie durch Herleitungsinduktion in S2: $X \vdash n\ Y, \bot \Rightarrow X \vdash n\ Y$.

4 Beweisen Sie Lemma 10.

5 Beweisen Sie Lemma 11.

6 Beweisen Sie die restlichen Fälle von Lemma 13.

7 Beweisen Sie die restlichen Fälle von Lemma 14.

8 Beweisen Sie Lemma 15.

9 Beweisen Sie die restlichen Fälle von Lemma 17.

10 Leiten Sie einige weitere Tautologien in einigen Varianten her.

11 Beweisen Sie Lemma 29.