RELEVANZKRITERIEN, MENGENLEHRE UND BEWEISTHEORIE

Martin Amerbauer

Salzburg

2001

Inhalt

Abstract

Nach einleitenden Betrachtungen erörtern wir im ersten Kapitel Fragen der Anwendbarkeit von Relevanzkriterien auf Beweise in der Mengenlehre anhand des Theorems $A \subseteq A$; im zweiten Kapitel untersuchen wir die Anwendung von Relevanzkriterien auf Formeln der Booleschen Mengenalgebra anhand der Theoreme $A \subseteq A \cup B$ und $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$.
Im Anschluß an eine vorläufige Zusammenfassung präzisieren wir im vierten Kapitel die beweistheoretischen Grundlagen der ersten beiden Kapitel und gehen der Frage nach, ob alle relevanten Sequenzen eine relevante Herleitung haben. Dazu formulieren wir verschiedene Versionen eines Sequenzenkalküls für die Aussagenlogik und zeigen, daß es in jeder Version relevante Sequenzen gibt, die keine schnittfreie relevante Herleitung haben. Das Hauptproblem, ob es relevante Sequenzen gibt, die überhaupt keine relevante Herleitung haben, kann nur für eine Version positiv beantwortet werden.

Bemerkung:
Diese Arbeit wurde im wesentlichen im Jahr 1995 verfasst und in den Jahren 1998 bzw. 2001 geringfügig überarbeitet.

0 Einleitung und formaler Rahmen

Patrick Suppes schlägt im Anschluß an Paul Weingartners Aufsatz „Can there be reasons for putting limitations on classical logic?“[1] vor, Relevanzkriterien auf Beweise in der Mengenlehre anzuwenden:

„It would be nice to have an additional piece of genuinely empirical data in some extended systems that are easy to formalize, as for example Zermelo-Fraenkel set theory. It would be interesting even if tedious to put together data on which principles of classical logic are actually used in most proofs of the first six hundred to seven hundred theorems proved. (In my own book[2] there are between six hundred and seven hundred theorems[3].)“[4]

Paul Weingartner und Gerhard Schurz haben in einer Reihe von Arbeiten Relevanzkriterien zur Lösung von Paradoxien erarbeitet und somit deren philosophische Fruchbarkeit nachgewiesen[5]. Im Gegensatz zu Relevanzlogiken konstruiert man hier keine neuen nicht-klassischen Logiken, sondern behält die klassische Logik als Hintergrund bei und schränkt sie mit Hilfe von Relevanzkriterien ein.
(Ein) Paradigma einer irrelevanten Formel bzw. einer irrelevanten Deduktion ist für Weingartner und Schurz die aussagenlogische Formel $p \rightarrow p \vee q$ bzw. die Deduktion $p \vdash p \vee q$ (Addition), mit deren Hilfe sich etwa das Ross-Paradox der deontischen Logik konstruieren läßt:

Wenn ich den Brief zur Post bringen soll, soll ich ihn zur Post bringen oder verbrennen

Formal $Op \rightarrow O(p \vee q)$ (mit OA als Abkürzung für ‘es ist geboten, daß A’); dies ergibt sich aus der erwähnten Formel $p \rightarrow p \vee q$, dem Formelschema $O(A \rightarrow B) \rightarrow (OA \rightarrow OB)$ und der Regel $A \Rightarrow OA$.
Ich möchte nun aus der erwähnten Literatur zwei Relevanzkriterien herausgreifen und anhand von Beispielen vorstellen:

Relevanzkriterium 1 von Paul Weingartner:

„B is an R-consequence (R-consequent) of A iff
(1) $A \vdash B$ (resp. $\vdash (A \rightarrow B)$)
(2) It is not the case that there is a propositional variable (predicate) in B which can be uniformily replaced on some (at least one) of ist occurrences by an arbitrary

[1] Weingartner, Paul: Can there be reasons for putting limitations on classical logic? In: *Patrick Suppes: Scientific philosopher*. Vol. 3. Hrsg. von Humphreys, P. Dordrecht 1994: 89-121.
[2] Gemeint ist: Suppes, Patrick: *Axiomatic set theory*. Princeton 1967.
[3] Genau sind es 539.
[4] Suppes, Patrick: Comments by Patrick Suppes. In: *Patrick Suppes: Scientific philosopher*. Vol. 3. Hrsg. von Humphreys, P. Dordrecht 1994: 121-124.
[5] Vgl. etwa die Publikationen der genannten Autoren im Literaturverzeichnis.

propositional variable (or predicate of same arity) salva validitate of A $\vdash$ B (resp. of $\vdash$ (A $\rightarrow$ B)).

(3) Every consequence B of A which satisfies (2) is replaced by some formula B* such that (i) B $\dashv\vdash$ B* (resp. $\vdash$ (B $\leftrightarrow$ B*))

(ii) B* has the form of a conjunction with as many as possible conjuncts such that also

(iii) A $\vdash$ B* (resp. $\vdash$ (A $\rightarrow$ B*)) satisfies (2). (That such a B* always exists has been proved in Schurz-Weingartner (1987)[6] p.59, Proposition 9 (Anm. Weingartner)

(iv) B does not contain superflous repetitions A $\wedge$ A $\wedge$ ... $\wedge$ A or A $\vee$ A $\vee$ ... $\vee$ A as subformulas.“[7]

Relevanzkriterium 2 von Gerhard Schurz:

„(Informal Definition) Assume X $\vdash_L$ A. Then A is a relevant conclusion of X iff no predicate in A is replaceable on some of its occurrences by any other predicate of the same arity, salva validitate of X $\vdash_L$ A. Otherwise, A is an irrelevant conclusion of X.“[8]

Im folgenden werde ich vereinfachend nur mehr von ‘**Relevanzkriterium**’ sprechen, wenn ich damit das Kriterium von Weingartner, Klausel (1) und (2) bzw. das Kriterium von Schurz meine (das eine leichte Verallgemeinerung auf Formelmengen im Antezedens ist).
Weingartners Klausel (3) ist eine zusätzliche Einschränkung, speziell konzipiert für eine Quantenlogik (so ist z.B. die Deduktion $p\wedge(q\vee r)\vdash(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ irrelevant nach Weingartner, jedoch relevant nach Schurz). Die durch das Relevanzkriterium eingeschränkte klassische Konsequenzrelation nennen wir **relevante Deduktion**.

Grundidee des Relevanzkriteriums ist folgende:
Eine gültige Deduktion X $\vdash$ A ist irrelevant gdw es ein oder mehrere Vorkommnisse einer Aussagenvariablen p in A gibt, sodaß p durch eine beliebige andere Aussagenvariable (an diesen Vorkommnissen) ersetzt werden kann und die Deduktion gültig bleibt.
Zusätzlich kann man definieren: eine Formel A $\rightarrow$ B ist irrelevant gdw die Deduktion A $\vdash$ B irrelevant ist.

p $\vdash$ p $\vee$ q ist irrelevant, weil p $\vdash$ p $\vee$ B ebenso gilt für jede beliebige Formel B;
q $\vdash$ p $\vee$ $\neg$p ist irrelevant, weil q $\vdash$ B $\vee$ $\neg$B gilt für jede beliebige Formel B, etc.

---

[6] Schurz, Gerhard /Weingartner, Paul: Verisimilitude defined by relevant consequence-elements. A new reconstruction of Popper’s original idea. In: *What is closer-to-the-truth*. Hrsg. von Kuipers, Th.: Amsterdam (1987): 47-77.
[7] Weingartner, Paul: A logic for QM based on classical logic. In: *L’Art, la science et la metaphysique*. Hrsg. von : Luz Garcia Alonso / Moutsopoulos, E. / Seel, G. (Hg.): Bern 1993: 439-458.
[8] Schurz, Gerhard: Relevant deduction. From solving paradoxes towards a general theory. In: *Erkenntnis* 35(1991): 391-437.

Beispiele

(i) Formel und Deduktion 1 relevant nach Weingartner, Deduktion 1 und 2 relevant nach Schurz:

Formel	Deduktion 1	Deduktion 2
$p \wedge q \rightarrow p$	$p \wedge q \vdash p$	$p, q \vdash p$
$p \wedge p \rightarrow p$	$p \wedge p \vdash p$	
$p\wedge(p\rightarrow q) \rightarrow q$	$p\wedge(p\rightarrow q) \vdash q$	$p, p\rightarrow q \vdash q$
$\neg q\wedge(p\rightarrow q) \rightarrow \neg p$	$\neg q\wedge(p\rightarrow q) \vdash \neg p$	$\neg q, p\rightarrow q \vdash \neg p$
$(p\vee q)\wedge\neg q \rightarrow p$	$(p\vee q)\wedge\neg q \vdash p$	$p\vee q, \neg q \vdash p$
$p \rightarrow p$	$p \vdash p$	
$p \rightarrow \neg\neg p$	$p \vdash \neg\neg p$	
$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r) \rightarrow (p\rightarrow r)$	$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r) \vdash (p\rightarrow r)$	$p\rightarrow q, q\rightarrow r \vdash p\rightarrow r$
$p\wedge q \rightarrow q\wedge p$	$p\wedge q \vdash q\wedge p$	$p, q \vdash q\wedge p$
$(p\wedge q)\vee(p\wedge r) \rightarrow p\wedge(q\vee r)$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r) \vdash p\wedge(q\vee r)$	
$\forall xFx \rightarrow \exists xFx$	$\forall xFx \vdash \exists xFx$	
$\forall xFx \rightarrow Fa$	$\forall xFx \vdash Fa$	
$Fa \rightarrow \exists xFx$	$Fa \vdash \exists xFx$	
$\forall x(Fx\rightarrow Gx)\wedge Fa \rightarrow Ga$	$\forall x(Fx\rightarrow Gx)\wedge Fa \vdash Ga$	$\forall x(Fx\rightarrow Gx), Fa \vdash Ga$
$\forall x(Fx\wedge Gx) \rightarrow \forall xFx$	$\forall x(Fx\wedge Gx) \vdash \forall xFx$	

(ii) Formel und Deduktion 1 irrelevant nach Weingartner, Deduktion 1 und 2 irrelevant nach Schurz (die unterstrichenen Variablen bzw. Prädikate können beliebig ersetzt werden):

Formel	Deduktion 1	Deduktion 2
$p \rightarrow p \vee \underline{q}$	$p \vdash p \vee \underline{q}$	
$\neg p \rightarrow (p\rightarrow \underline{q})$	$\neg p \vdash (p\rightarrow \underline{q})$	
$p \rightarrow (\underline{q}\rightarrow p)$	$p \vdash (\underline{q}\rightarrow p)$	
$(p\rightarrow q) \rightarrow (p\wedge \underline{r}\rightarrow q)$	$(p\rightarrow q) \vdash (p\wedge \underline{r}\rightarrow q)$	
$p\wedge q \rightarrow (p\wedge \underline{r})\vee(q\wedge\neg \underline{r})$	$p\wedge q \vdash (p\wedge \underline{r})\vee(q\wedge\neg \underline{r})$	$p, q. \vdash .(p\wedge \underline{r})\vee(q\wedge\neg \underline{r})$
$p\wedge\neg p \rightarrow \underline{q}$	$p\wedge\neg p \vdash \underline{q}$	$p, \neg p. \vdash .\underline{q}$
$p\wedge\neg p \rightarrow \underline{p}\wedge\neg \underline{p}$	$p\wedge\neg p \vdash \underline{p}\wedge\neg \underline{p}$	$p, \neg p. \vdash .\underline{p}\wedge\neg \underline{p}$
$p\wedge\neg p \rightarrow \underline{q}\wedge\neg \underline{q}$	$p\wedge\neg p \vdash \underline{q}\wedge\neg \underline{q}$	$p, \neg p. \vdash .\underline{q}\wedge\neg \underline{q}$
$q \rightarrow \underline{p}\vee\neg \underline{p}$	$q \vdash \underline{p}\vee\neg \underline{p}$	
$p \rightarrow \underline{q}\vee\neg \underline{q}$	$p \vdash \underline{q}\vee\neg \underline{q}$	
$p \rightarrow (\underline{p}\rightarrow \underline{p})$	$p \vdash (\underline{p}\rightarrow \underline{p})$	

$\forall xFx \rightarrow \forall x(Fx \vee \underline{G}x)$	$\forall xFx \vdash \forall x(Fx \vee \underline{G}x)$
$\exists xFx \rightarrow \exists x(Fx \vee \underline{G}x)$	$\exists xFx \vdash \exists x(Fx \vee \underline{G}x)$
$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow \forall x(Fx \wedge \underline{H}x \rightarrow Gx)$	$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(Fx \wedge \underline{H}x \rightarrow Gx)$
$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow \forall x(Fx \rightarrow Gx \vee \underline{H}x)$	$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx \vee \underline{H}x)$
$Fa \rightarrow Fa \vee \underline{F}b$	$Fa \vdash Fa \vee \underline{F}b$

Bemerkung 1: Logische Eigenschaften der relevanten Deduktion und Vergleich mit Relevanzlogiken:

Im Vergleich zu den Relevanzlogiken von Anderson / Belnap[9] gilt:

Deduktion	Relevanzlogik	Relevanzkriterium
$p \vdash p \vee q$	gültig	irrelevant
$p \vee q, \neg q \vdash p$	ungültig	relevant
$p \wedge \neg p \vdash q$	ungültig	irrelevant
$p \wedge \neg p \vdash p$	gültig	irrelevant

Ferner unterscheiden sich die relevante Deduktion und die durch Relevanzlogiken definierte Konsequenzrelation in folgenden Punkten (das Komplement der relevanten Deduktion nennen wir irrelevante Deduktion):

Eigenschaft	Relevante Deduktion	Irrelevante Deduktion	Relevanzlogisch def. Konsequenzrelation
a) Abgeschlossenheit unter Substitution	nein	ja	ja
b) Gültigkeit der Abschlußeigenschaft	nein	ja	ja
c) Gültigkeit der Monotonie	nein	ja	ja
d) Gültigkeit des Deduktionstheorems	nein	ja	ja

wobei gilt:

a) $\vdash$ ist abgeschlossen unter Substitution gdw für alle Substitutionen s gilt: $X \vdash A \Rightarrow sX \vdash sA$; Gegenbeispiel für relevante Deduktion: $p \vdash p$ relevant, aber $p \vee \neg p \vdash p \vee \neg p$ ist irrelevant.
b) die Abschlußeigenschaft ist gültig für $\vdash$ gdw: $Y \vdash A$ für alle $A \in X$, und $X \vdash B \Rightarrow Y \vdash B$; Gegenbeispiel für relevante Deduktion: $(p \vee q) \wedge r \vdash p \vee (q \wedge r)$ und $p \vee (q \wedge r) \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ sind relevant, aber $(p \vee q) \wedge r \vdash (p \vee q) \wedge (\underline{p} \vee r)$ ist irrelevant.
c) $\vdash$ ist monoton gdw: $X \vdash A \Rightarrow X, Y \vdash A$; Gegenbeispiel für relevante Deduktion: $p \vee q \vdash p \vee q$ ist relevant, aber $p, p \vee q \vdash p \vee q$ ist irrelevant.

[9] Anderson, Alan Ross / Belnap, Nuel D.: *Entailment: The logic of relevance and necessity*. Vol. I. Princeton 1975.

d) das Deduktionstheorem ist gültig für $\vdash$ gdw: X, A $\vdash$ B $\Rightarrow$ X $\vdash$ A $\rightarrow$ B; Gegenbeispiel für relevante Deduktion: q, p $\vdash$ p ist relevant, aber q $\vdash$ p $\rightarrow$ p ist irrelevant.

Problem 1: *J. Schröder*[10] *gibt ein auf der Tableau-Methode basierendes Entscheidungsverfahren für das Körner'sche Relevanzkriterium; dieses Kriterium lautet: eine Tautologie A ist K-relevant gdw es kein Vorkommnis einer Teilformel B von A gibt, sodaß die Formel A*, die aus A durch Ersetzung dieses Vorkommnisses von B durch ¬B entsteht, eine Tautologie ist.*
Frage: gibt es ein solches Entscheidungsverfahren auch für den aussagenlogischen Teil des Relevanzkriteriums von Weingartner / Schurz?

Wenn wir versuchen, das Relevanzkriterium auf **Beweise** in der Mengenlehre anzuwenden, sind die Objekte unserer Untersuchung in erster Linie mathematische Beweise; da es zumindest prinzipiell möglich sein sollte, jeden einzelnen Schritt eines solchen Beweises anzugeben, fassen wir Beweise als Herleitungen in einem formalisierten Kalkül auf. Prinzipiell hat man die Wahl zwischen Axiom-Regel-Kalkülen (Axiomatisierungen im Stil von Hilbert-Frege) und Regel-Kalkülen (Natürliches Schließen, Sequenzenkalkül). Aus Gründen der Praktikabilität entscheiden wir uns für Regel-Kalküle, da in diesen Beweise leichter aufzufinden sind (so gibt es für die Aussagenlogik ein effektives Verfahren, um von einer herleitbaren Sequenz eine Herleitung derselben anzugeben).
Vgl. jedoch auch die Bemerkungen zu Axiomatisierungen im Stil von Hilbert-Frege am Ende von Kapitel 1.

Wir verwenden in Kapitel 1 und 2 ein System des Natürlichen Schließens bzw. des Sequenzenkalküls mit folgenden Eigenschaften:

Ist X eine (evtl. leere) endliche Formelmenge, so ist X $\vdash$ A eine Sequenz (Formeln aus X heißen Antezedensformeln, A heißt Sukzedensformel; die intendierte Bedeutung von X $\vdash$ A ist: wenn alle Antezedensformeln wahr sind, dann auch die Sukzedensformel).

Axiome sind Sequenzen der Gestalt A $\vdash$ A (falls relevant)

Schlußregeln sind u.a.:

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A \rightarrow B}$$ Konditionaler Beweis (KB)

$$\frac{X \vdash A[a]}{X \vdash \forall x A[x]}$$ Universelle Generalisierung (UG) mit Variablenbedingung (VB): die freie Variable a kommt unter dem Strich nicht mehr vor

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash A \vee B}$$ Addition (ADD)

[10] Schröder, J.: Körner's criterion of relevance and analytic tableau. In: *Journal of Philosophical Logic* 21(1992): 183-192.

Die Herleitbarkeit einer Sequenz wird induktiv definiert durch: jedes Axiom ist herleitbar; sind die Prämissen einer Schlußregel herleitbar, dann auch die Konklusion.

Wir schreiben $\varnothing \vdash X$ oder $X \vdash \varnothing$ wenn wir betonen wollen, daß links bzw. rechts vom Sequenzenzeichen $\vdash$ keine Formel steht.

Als zugrundeliegende **axiomatische Mengenlehre** wählen wir ein System von Zermelo-Fraenkel, das in folgendem Detail von Suppes[11] abweicht: aus Gründen der Einfachheit schließen wir Individuen explizit aus und können so mit nur einer Sorte gebundener Variablen arbeiten, wie z.B. auch H.-D. Ebbinghaus[12].

Wir benutzen in Kapitel 1:

(Def $\subseteq$)	$\forall x \forall y\, (x \subseteq y \leftrightarrow \forall z\, (z \in x \rightarrow z \in y))$	Def. 3

und zusätzlich in Kapitel 2:

(Def $\cap$)	$\forall x \forall y \forall u\, (x \cap y = u \leftrightarrow \forall z\, (z \in u \leftrightarrow z \in x \wedge z \in y))$	Def. 5
(Def $\cup$)	$\forall x \forall y \forall u\, (x \cup y = u \leftrightarrow \forall z\, (z \in u \leftrightarrow z \in x \vee z \in y))$	Def. 6

Damit diese Definitionen Sinn machen, benötigt man das Separierungsaxiom(enschema) und das Extensionalitätsaxiom, und für (Def $\cup$) noch eine Instanz des Separierungsaxioms, nämlich das (kleine) Vereinigungsmengenaxiom:

(Sep)	$\forall x \exists y \forall z\, (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi\, (x))$
(Union)	$\forall x \forall y \exists u \forall z\, (z \in u \leftrightarrow z \in x \vee z \in y)$
(Ext)	$\forall x \forall y \forall z\, ((z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$

Daraus lassen sich dann folgende Theoreme ableiten:

(Th $\cap$)	$\forall x \forall y \forall z\, (z \in x \cap y \leftrightarrow z \in x \wedge z \in y)$	Theorem 12
(Th $\cup$)	$\forall x \forall y \forall z\, (z \in x \cup y \leftrightarrow z \in x \vee z \in y)$	Theorem 20

Diese Definitionen sind nach Suppes aufzufassen als zusätzliche Prämissen in der Ableitung von Theoremen, sie sind nicht-kreativ und definierte Zeichen lassen sich nach dem Eliminierbarkeitskriterium[13] in jeder Formel ersetzen (d.h. die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre ZF ist eine Theorie erster Stufe und alle Theoreme von ZF lassen sich mit Hilfe der klassischen Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit beweisen).

---

[11] Suppes, Patrick: *Axiomatic set theory*. Princeton 1967. Hier und im folgenden beziehen sich alle Angaben von Axiomen, Definitonen, Theoremen etc. auf dieses Buch.
[12] Ebbinghaus, Heinz-Dieter: *Einführung in die Mengenlehre*. 3. Aufl. Mannheim 1994.
[13] Suppes, Patrick: *Axiomatic set theory*. Princeton 1967: 16.

1 Sind Relevanzkriterien auf Beweise in der Mengenlehre anwendbar?

Nun geht es darum, das Relevanzkriterium auf Beweise in der Mengenlehre tatsächlich anzuwenden. Betrachten wir dazu als **erstes Beispiel** folgendes Theorem der Mengenlehre (Theorem 3 von Suppes):

$$\forall x\ (x \subseteq x)$$

Zuerst müssen wir das definierte Zeichens $\subseteq$ eliminieren. Das Eliminierbarkeitskriterium von Suppes lautet:

„Criterion of Eliminability: A formula P introducing a new symbol satisfies the criterion of eliminability if and only if: whenever Q_1 is a formula in which the new symbol occurs, then there is a primitive formula Q_2, such that $P \rightarrow (Q_1 \leftrightarrow Q_2)$ is derivable from the axioms.“[14]

Primitive Formeln enthalten daher $\in$ als einziges mengentheoretisches Symbol. Wir zeigen, daß man durch Elimination des definierten Zeichens $\subseteq$ aus $\forall x\ (x \subseteq x)$ die Formel $\forall x \forall z\ (z \in x \rightarrow z \in x)$ erhält.

P	$\forall x \forall y\ (x \subseteq y \leftrightarrow \forall z\ (z \in x \rightarrow z \in y))$	= (Def $\subseteq$)
Q_1	$\forall x\ (x \subseteq x)$	
Q_2	$\forall x \forall z\ (z \in x \rightarrow z \in x)$	

Behauptung: $\vdash P \rightarrow (Q_1 \leftrightarrow Q_2)$

In der folgenden Beweisskizze (mit einigen zusätzlichen prädikatenlogischen Regeln) zeigen wir, daß gilt:

(i) $P, Q_1 \vdash Q_2$

(ii) $P, Q_2 \vdash Q_1$

ad (i):
$P \vdash a \subseteq a \leftrightarrow \forall z\ (z \in a \rightarrow z \in a)$
$P \vdash a \subseteq a \rightarrow \forall z\ (z \in a \rightarrow z \in a)$
$Q_1 \vdash a \subseteq a$
$a \subseteq a,\ a \subseteq a \rightarrow \forall z\ (z \in a \rightarrow z \in a) \vdash \forall z\ (z \in a \rightarrow z \in a)$
$P, Q_1 \vdash \forall z\ (z \in a \rightarrow z \in a)$
$P, Q_1 \vdash Q_2$

ad (ii)
$Q_2 \vdash \forall z\ (z \in a \rightarrow z \in a)$
$P \vdash \forall z\ (z \in a \rightarrow z \in a) \rightarrow a \subseteq a$
$\forall z\ (z \in a \rightarrow z \in a),\ \forall z\ (z \in a \rightarrow z \in a) \rightarrow a \subseteq a \vdash a \subseteq a$
$P, Q_2 \vdash a \subseteq a$
$P, Q_2 \vdash Q_1$

[14] Suppes, Patrick: *Axiomatic set theory*. Princeton 1967: 16.

Daher müssen wir eine Herleitung der Sequenz $\varnothing \vdash \forall x \forall z\ (z \in x \rightarrow z \in x)$ finden; eine mögliche Herleitung könnte so aussehen:

1.	$w \in a \vdash w \in a$	relevantes Axiom
2.	$\varnothing \vdash w \in a \rightarrow w \in a$	(KB) aus 1.
3.	$\varnothing \vdash \forall z\ (z \in a \rightarrow z \in a)$	(UG) aus 2.
4.	$\varnothing \vdash \forall x\ \forall z\ (z \in x \rightarrow z \in x)$	(UG) aus 3.

Bis jetzt haben wir nur die Begriffe *relevante Sequenz* (bzw. Deduktion) und *herleitbare Sequenz* zur Verfügung; gefragt wäre ein Begriff wie relevanter Beweis oder relevante Herleitung.

Definition - Vorschlag 1: Eine Sequenz $X \vdash A$ ist *relevant herleitbar* gdw es eine Herleitung von $X \vdash A$ gibt, in der keine irrelevanten Sequenzen auftreten, d.h. wenn jede auftretende Sequenz relevant ist.

Wir stehen hier vor folgendem **Problem**:

In einer Herleitung von Sequenzen treten im allgemeinen Sequenzen der Form $X \vdash \varnothing$ bzw. $\varnothing \vdash A$ auf, d.h. Sequenzen, wo rechts bzw. links vom Sequenzenzeichen keine Formel steht; das Relevanzkriterium jedoch wurde für Anwendungen konzipiert, wo die beiden betrachteten Spezialfälle nicht auftreten. Würde man das Kriterium hier anwenden, wären Sequenzen der Form $X \vdash \varnothing$ stets relevant (da es kein Vorkommnis einer Aussagenvariablen rechts von $\vdash$ gibt), Sequenzen der Form $\varnothing \vdash A$ stets irrelevant (da die betrachtete Logik abgeschlossen unter Substitution ist).

Dies würde bedeuten, daß die Sequenz $\varnothing \vdash \forall x \forall z\ (z \in x \rightarrow z \in x)$ nicht relevant herleitbar ist nach obigem Vorschlag 1.

Man kann eine Logik L auffassen (i) als Formelmenge oder (ii) allgemeiner als Konsequenzrelation $\vdash$, d.i. eine Relation zwischen Formelmengen und Formeln; Konsequenzrelationen $\vdash$ erzeugen i.a. Logiken im Sinn von Formelmengen durch: $A \in L(\vdash)$ gdw $\varnothing \vdash A$ (A heißt dann auch beweisbar in $\vdash$; im allgemeinen gibt es viele solche Relationen $\vdash$, die eine gegebene Formelmenge erzeugen; allerdings gibt es für jede Logik L nur eine einzige derartige Relation, für die auch gleichzeitig das Deduktionstheorem gilt[15])

Das Problem des Relevanzkriteriums, das ich hier sehe, kann man so formulieren: es erzeugt keine Formelmenge, oder anders ausgedrückt: der Begriff der Beweisbarkeit läßt sich für die relevante Deduktion nicht befriedigend definieren.

[15] Rautenberg, W.: *Klassische und nichtklassische Aussagenlogik*. Braunschweig 1979.

Bemerkung 2:
$\emptyset \vdash A$ ist relevant gdw A relevant ist, wäre auch keine Lösung, da das Kriterium im besten Fall relevante Implikationen erzeugt, was auch zuwenig ist, da man beliebige Formeln A in $\emptyset \vdash A$ zulassen muß.

Bemerkung 3:
Dasselbe Problem würde auch auftreten, wenn man in $\forall x\,(x \subseteq x)$ das definierte Zeichen $\subseteq$ nicht eliminiert und versucht, (Def $\subseteq$) $\vdash \forall x\,(x \subseteq x)$ herzuleiten:

P	$\forall x \forall y\,(x \subseteq y \leftrightarrow \forall z\,(z \in x \rightarrow z \in y))$	= (Def $\subseteq$)
Q_1	$\forall x\,(x \subseteq x)$	

Beweisskizze einer Herleitung von $P \vdash Q_1$:

$$P \vdash \forall z\,(z \in a \rightarrow z \in a) \rightarrow a \subseteq a$$
$$w \in a \vdash w \in a$$
$$\vdash w \in a \rightarrow w \in a$$
$$\vdash \forall z\,(z \in a \rightarrow z \in a)$$
$$\forall z\,(z \in a \rightarrow z \in a),\ \forall z\,(z \in a \rightarrow z \in a) \rightarrow a \subseteq a \vdash a \subseteq a$$
$$P \vdash a \subseteq a$$
$$P \vdash Q_1$$

Bemerkung 4:
Ein in gewissem Sinne komplementäres **Problem** zum oben genannten ist folgendes:
normalerweise gilt für eine (klassische) Konsequenzrelation $\vdash$ und für eine beliebige widerspruchsvolle Formel $\perp$: $\perp \vdash A$ für jede Formel A ($\perp$ heißt dann auch $\vdash$ -inkonsistent); für die relevante Deduktion hingegen gilt hingegen $\perp \vdash A$ für keine Formel A, da das Prinzip ex falso quodlibet irrelevant ist, wie wir gesehen haben.
Was hindert uns nun, das naive Komprehensionsprinzip (Kom) $\exists y \forall x\,(x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$ als Axiom zu nehmen; wie wir wissen, ist dieses Prinzip widerspruchsvoll, d.h. (Kom) $\vdash A$ ist zwar herleitbar für jede Formel A, aber irrelevant für jede Formel A.

Das Problem des Relevanzkriteriums, das ich hier sehe, kann man so formulieren: es blockiert jede Herleitung aus einem Widerspruch, oder anders ausgedrückt: der Begriff der Konsistenz für die relevante Deduktion bedarf der Klärung.

Bemerkung 5:
In Axiomatisierungen im Stil von Hilbert-Frege steckt man die Information über eine Theorie nicht in die Regeln, sondern in Axiome.
Ein Beweis einer Formel B ist hier eine Formelfolge $A_1, A_2, ..., A_n$, für die gilt: jedes der A_i ist entweder ein Axiom oder aus vorhergehenden Folgengliedern mit Modus Ponens (MP) oder Universeller Generalisierung (UG) ableitbar, und A_n ist B ((UG): ist A[a] beweisbar, dann auch $\forall$xA[x], mit der Variablenbedingung (VB): die freie Variable a kommt in $\forall$xA[x] nicht mehr vor):

Ein Beweis von $\forall x \forall z\, (z \in x \rightarrow z \in x)$ könnte so aussehen:

1.	$w \in a \rightarrow w \in a$	Aussagenlogik
2.	$\forall z\, (z \in a \rightarrow z \in a)$	(UG) aus 1.
3.	$\forall x \forall z\, (z \in x \rightarrow z \in x)$	(UG) aus 2.

Probleme:

a): Das bereits angesprochene Problem der Praktikabilität: zum tatsächlichen Auffinden von Beweisen sind Axiom-Regel-Kalküle sehr schwerfällig und umständlich, da man hier mit nur wenigen Schlußregeln auskommen muß.

b) Der Beweis von $p \rightarrow p$ (siehe Punkt 1. des obigen Beweises) aus den Standardaxiomen benutzt das irrelevante Axiom $p \rightarrow (q \rightarrow p)$.

c) Wir haben hier nur den Begriff der beweisbaren Formel zur Verfügung, und nicht den Begriff der relevanten Formel in voller Allgemeinheit (sondern nur im besten Fall den Begriff der relevanten Implikation). Der Begriff des relevanten Beweises scheint mir hier schwerer zu fassen als in Regel-Kalkülen, da eine Definition der Art: A ist relevant beweisbar gdw es einen Beweis von A gibt, in dem nur relevante Formeln vorkommen, daher von vorneherein ausscheidet.
Es wäre höchstens folgendes möglich: A ist relevant beweisbar gdw es einen Beweis von A gibt, in dem keine irrelevante Formel vorkommt.

d) Analoges gilt, wenn man $\forall x\, (x \subseteq x)$ aus (Def $\subseteq$) beweist.

2 Welche Theoreme der Booleschen Mengenalgebra sind relevant herleitbar?

Versuchen wir, die Definition des Relevanzkriteriums etwas zu modifizieren, und nennen wir Sequenzen der Form $X \vdash \emptyset$ bzw. $\emptyset \vdash A$ neutral; das ursprüngliche Relevanzkriterium wenden wir nur auf Sequenzen $X \vdash A$ an, wenn $X \neq \emptyset$ ist und A wirklich auftritt; d.h. wir definieren:
$X \vdash A$ ist relevant gdw $X \neq \emptyset$ ist, A wirklich auftritt und relevant ist nach dem ursprünglichen Relevanzkriterium;
$X \vdash A$ ist irrelevant gdw $X \neq \emptyset$ ist, A wirklich auftritt und irrelevant ist nach dem ursprünglichen Relevanzkriterium;
sonst ist $X \vdash A$ neutral.

Definition - Vorschlag 2: $X \vdash A$ ist *relevant herleitbar* gdw es eine Herleitung von $X \vdash A$ gibt, in der keine irrelevanten (im Sinn von oben) Sequenzen auftreten.

Dies bedeutet nicht, daß alle auftretenden Sequenzen relevant sind, da sie auch neutral sein können; das erste Beispiel aus Kapitel 1 wäre dann relevant herleitbar nach obigem Vorschlag 2. Wie steht es nun mit anderen Beispielen? Erinnern wir uns, daß jedes Relevanzkriterium bestimmte Deduktionen als irrelevant aussondert, insbesondere die Deduktion $p \vdash p \vee q$, und betrachten wir als **zweites Beispiel** folgendes Theorem der Mengenlehre (Theorem 25 von Suppes):

$$\forall x\ \forall y\ (x \subseteq x \cup y)$$

Zuerst müssen wir die definierten Zeichen $\subseteq$ und $\cup$ eliminieren; wir zeigen, daß man durch Elimination der definierten Zeichen $\subseteq$ und $\cup$ aus $\forall x\ \forall y\ (x \subseteq x \cup y)$ die Formel $\forall x \forall y \forall z\ (z \in x \rightarrow z \in x \vee z \in y)$ erhält:

P_1	$\forall x \forall y\ (x \subseteq y \leftrightarrow \forall z\ (z \in x \rightarrow z \in y))$	= (Def $\subseteq$)
P_2	$\forall x \forall y \forall u\ (x \cup y = u \leftrightarrow \forall z\ (z \in u \leftrightarrow z \in x \vee z \in y))$	= (Def $\cup$)
Q_1	$\forall x\ \forall y\ (x \subseteq x \cup y)$	
Q_2	$\forall x \forall y \forall z\ (z \in x \rightarrow z \in x \vee z \in y)$	

Behauptung: $\vdash P_1 \wedge P_2 \rightarrow (Q_1 \leftrightarrow Q_2)$
In der folgenden Beweisskizze zeigen wir, daß gilt:

(i) $P_1, P_2, Q_1 \vdash Q_2$
(ii) $P_1, P_2, Q_2 \vdash Q_1$

ad (i):
$P_2 \vdash a \cup b = a \cup b \rightarrow \forall z\ (z \in a \cup b \leftrightarrow z \in a \vee z \in b)$
$\vdash a \cup b = a \cup b$
$P_2 \vdash \forall z\ (z \in a \cup b \leftrightarrow z \in a \vee z \in b)$

$P_2 \vdash w \in a \cup b \leftrightarrow w \in a \vee w \in b$
$P_1 \vdash a \subseteq a \cup b \rightarrow \forall z\,(z \in a \rightarrow z \in a \cup b)$
$Q_1 \vdash a \subseteq a \cup b$
$P_1, Q_1 \vdash w \in a \rightarrow w \in a \cup b$
$P_1, P_2, Q_1 \vdash w \in a \rightarrow w \in a \vee w \in b$
$P_1, P_2, Q_1 \vdash Q_2$

Bemerkung zur Einsetzung von $a \cup b$ als Term für u bzw. y: auch Suppes verwendet dieses Prinzip, z.B. beim Beweis von Theorem 12[16].

ad (ii): $P_1 \vdash \forall z\,(z \in a \rightarrow z \in a \cup b) \rightarrow a \subseteq a \cup b$
$P_2 \vdash w \in a \vee w \in b \rightarrow w \in a \cup b$
$Q_2 \vdash w \in a \rightarrow w \in a \vee w \in b$
$P_2, Q_2 \vdash w \in a \rightarrow w \in a \cup b$
$P_2, Q_2 \vdash \forall z\,(z \in a \rightarrow z \in a \cup b)$
$P_1, P_2, Q_2 \vdash a \subseteq a \cup b$
$P_1, P_2, Q_2 \vdash Q_1$

Daher müssen wir eine Herleitung der Sequenz $\varnothing \vdash \forall x \forall y \forall z\,(z \in x \rightarrow zvx \vee z \in y)$ finden; eine mögliche Herleitung könnte so aussehen:

1.	$w \in a \vdash w \in a$	relevantes Axiom
2.	$w \in a \vdash w \in a \vee w \in b$	(ADD) aus 1.
3.	$\varnothing \vdash w \in a \rightarrow w \in a \vee w \in b$	(KB) aus 2.
4.	$\varnothing \vdash \forall z\,(z \in a \rightarrow z \in a \vee z \in b)$	(UG) aus 3.
5.	$\varnothing \vdash \forall y\,\forall z\,(z \in a \rightarrow z \in a \vee z \in y)$	(UG) aus 4.
6.	$\varnothing \vdash \forall x \forall y \forall z\,(z \in x \rightarrow z \in x \vee z \in y)$	(UG) aus 5.

Wir sehen uns (vorläufig, siehe auch Kapitel 4) mit folgender Tatsache konfrontiert:

Wir brauchen zur Herleitung der Sequenz $\varnothing \vdash \forall x \forall y \forall z\,(z \in x \rightarrow z \in x \vee z \in y)$ in unserem Kalkül das Prinzip der Addition (ADD) und das führt zur irrelevanten Sequenz 2.: $w \in a \vdash w \in a \vee w \in b$, die von der Form $p \vdash p \vee q$ ist; dies bedeutet, daß die Sequenz $\varnothing \vdash \forall x \forall y \forall z\,(z \in x \rightarrow z \in x \vee z \in y)$ nicht relevant herleitbar ist nach obigem Vorschlag 2.

Bemerkung 6:
Dieses Prinzip braucht man auch, wenn man (Def $\subseteq$), (Def $\cup$) $\vdash \forall x\,\forall y\,(x \subseteq x \cup y)$ herleitet:

P_1	$\forall x \forall y\,(x \subseteq y \leftrightarrow \forall z\,(z \in x \rightarrow z \in y))$	= (Def $\subseteq$)
P_2	$\forall x \forall y \forall u\,(x \cup y = u \leftrightarrow \forall z\,(z \in u \leftrightarrow z \in x \vee z \in y))$	= (Def $\cup$)
Q_1	$\forall x\,\forall y\,(x \subseteq x \cup y)$	

[16] Suppes, Patrick: *Axiomatic set theory*. Princeton 1967: 25.

Beweisskizze einer Herleitung von $P_1, P_2 \vdash Q_1$:

$$
\begin{array}{l}
\quad P_1 \vdash \forall z\,(z \in a \rightarrow z \in a \cup b) \rightarrow a \subseteq a \cup b \\
\quad P_2 \vdash w \in a \vee w \in b \rightarrow w \in a \cup b \\
w \in a \vdash w \in a \\
w \in a \vdash w \in a \vee w \in b \\
\qquad\quad \vdash w \in a \rightarrow w \in a \vee w \in b \\
\quad P_2 \vdash w \in a \rightarrow w \in a \cup b \\
\quad P_2 \vdash \forall z\,(z \in a \rightarrow z \in a \cup b) \\
\quad P_1, P_2 \vdash a \subseteq a \cup b \\
\quad P_1, P_2 \vdash Q_1
\end{array}
$$

Bemerkung 7:
Das Relevanzkriterium trifft nicht Formeln vom Typ $\forall x\,(Fx \rightarrow Fx \vee Gx)$; diese Formel ist allerdings nicht relevant herleitbar, wie wir oben gesehen haben.

Allgemeiner formuliert stehen wir vor folgender Tatsache:

(i) Ausgangssituation:
A und B seien nur aus $\vee$ und $\wedge$ aufgebaut und die Deduktion $A \vdash B$ sei irrelevant, so z.B.:

$$
\begin{array}{l}
p \vdash p \vee \underline{q} \\
(p\vee q)\wedge r \vdash (p\vee q)\wedge(\underline{p}\vee r)
\end{array}
$$

speziell für Weingartner[17]: $p\wedge(q\vee r) \vdash (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

(ii) Übersetzung in die mengentheoretische Sprache:
man bildet die entsprechenden Übersetzungen in die mengentheoretische Sprache, indem man $\vee$ durch $\cup$, $\wedge$ durch $\cap$, $\vdash$ durch $\subseteq$ und verschiedene Aussagenvariable durch verschiedene Mengenvariable ersetzt (und universell generalisiert):

$$
\begin{array}{l}
x \subseteq x \cup y \\
(x\cup y)\cap t \subseteq (x\cup y)\cap(x\cup t) \\
x\cap(y\cup t) \subseteq (x\cap y)\cup(x\cap t)
\end{array}
$$

(iii) Elimination der definierten Zeichen:
Nach Elimination der Zeichen $\cup$, $\cap$ und $\subseteq$ erhält man die Formeln (bzw. den universellen Abschluß):

$$
\begin{array}{l}
\forall z\,(z\in x \rightarrow z\in x\vee z\in y) \\
\forall z\,((z\in x\vee z\in y) \wedge z\in t \rightarrow (z\in x\wedge z\in y)\wedge(z\in x\vee z\in t)) \\
\forall z\,(z\in x\wedge(z\in y\vee z\in t) \rightarrow (z\in x\wedge z\in y)\vee(z\in x\wedge z\in t))
\end{array}
$$

[17] Weingartner, Paul: A logic for QM based on classical logic. In: *L'Art, la science et la metaphysique*. Hrsg. von : Luz Garcia Alonso / Moutsopoulos, E. / Seel, G. (Hg.): Bern 1993: 439-458.

(iv) Frage nach der relevanten Herleitbarkeit:
die entsprechenden Sequenzen sind dann analog wie oben nicht relevant herleitbar, da man zur Herleitung gerade die irrelevanten Deduktionen benötigt; die mengentheoretischen Formeln sind ja gerade so konstruiert, daß sie die irrelevanten Deduktionen widerspiegeln.
Kurz gesagt: Boolesche Mengenalgebra ist Aussagenlogik, und wenn man die Aussagenlogik einschränkt, schränkt man auch die Boolesche Mengenalgebra ein.

Betrachten wir am Schluß dieses Kapitels als **drittes Beispiel** folgendes Theorem der Mengenlehre (Theorem 6 von Suppes):

$$\forall x \forall y \forall t\, (x \subseteq y \wedge y \subseteq t \rightarrow x \subseteq t)$$

Wir zeigen, daß man durch Elimination des definierten Zeichens $\subseteq$ aus $\forall x \forall y \forall t\, (x \subseteq y \wedge y \subseteq t \rightarrow x \subseteq t)$ folgende Formel erhält:
$\forall x \forall y \forall t\, (\forall z(z\in x \rightarrow z\in y) \wedge \forall z(z\in y \rightarrow z\in t) \rightarrow \forall z(z\in x \rightarrow z\in t))$

P	$\forall x \forall y\, (x \subseteq y \leftrightarrow \forall z\, (z \in x \rightarrow z \in y))$	= (Def $\subseteq$)
Q_1	$\forall x \forall y \forall t\, (x \subseteq y \wedge y \subseteq t \rightarrow x \subseteq t)$	
Q_2	$\forall x \forall y \forall t\, (\forall z(z\in x \rightarrow z\in y) \wedge \forall z(z\in y \rightarrow z\in t) \rightarrow \forall z(z\in x \rightarrow z\in t))$	

Behauptung: $\vdash P \rightarrow (Q_1 \leftrightarrow Q_2)$
In der folgenden Beweisskizze zeigen wir, daß gilt:

(i) $P, Q_1 \vdash Q_2$
(ii) $P, Q_2 \vdash Q_1$

$P \vdash a \subseteq b \leftrightarrow \forall z\, (z \in a \rightarrow z \in b)$
$P \vdash b \subseteq c \leftrightarrow \forall z\, (z \in b \rightarrow z \in c)$
$P \vdash a \subseteq c \leftrightarrow \forall z\, (z \in a \rightarrow z \in c)$
$Q_1 \vdash a \subseteq b \wedge b \subseteq c \rightarrow a \subseteq c$
$Q_2 \vdash \forall z\, (z \in a \rightarrow z \in b) \wedge \forall z\, (z \in b \rightarrow z \in c) \rightarrow \forall z\, (z \in a \rightarrow z \in c)$

Daher müssen wir eine Herleitung der Sequenz
$\varnothing \vdash \forall x \forall y \forall t\, (\forall z(z\in x \rightarrow z\in y) \wedge \forall z(z\in y \rightarrow z\in t) \rightarrow \forall z(z\in x \rightarrow z\in t))$
finden; eine mögliche Herleitung könnte so aussehen, wobei wir folgende zusätzliche Regeln benötigen:

$$\frac{X, A(t) \vdash C}{X, \forall x A(x) \vdash C} \quad (\forall L), \text{ wobei } t \text{ ein beliebiger Term ist}$$

$$\frac{X, A, B \vdash C}{X, A \wedge B \vdash C} \quad (\wedge L)$$

1.	$w\in a \to w\in b,\ w\in b \to w\in c \vdash w\in a \to w\in c$	relevante Deduktion
2.	$w\in a \to w\in b,\ \forall z(z\in b \to z\in c) \vdash w\in a \to w\in c$	($\forall$L) aus 1.
3.	$\forall z(z\in a \to z\in b),\ \forall z(z\in b \to z\in c) \vdash w\in a \to w\in c$	($\forall$L) aus 2.
4.	$\forall z(z\in a \to z\in b),\ \forall z(z\in b \to z\in c) \vdash \forall z(z\in a \to z\in c)$	(UG) aus 3.
5.	$\forall z(z\in a \to z\in b) \wedge \forall z(z\in b \to z\in c) \vdash \forall z(z\in a \to z\in c)$	($\wedge$L) aus 4.
6.	$\varnothing \vdash \forall z(z\in a \to z\in b) \wedge \forall z(z\in b \to z\in c) \to \forall z(z\in a \to z\in c)$	(KB) aus 5.
7.	$\varnothing \vdash \forall x\forall y\forall t\ (\forall z(z\in x\to z\in y) \wedge\forall z(z\in y\to z\in t)\to \forall z(z\in x\to z\in t))$	dreimal (UG) aus 6.

Dies bedeutet, daß diese Sequenz relevant herleitbar ist, vorausgesetzt allerdings, daß der Kettenschluß (Ket) $p\to q,\ q\to r \vdash p\to r$ relevant herleitbar ist (was am Ende von Kapitel 4.1.4 für einen Sequenzenkalkül auch gezeigt wird) .

Betrachten wir nochmals das erwähnte Gegenbeispiel zur Abschlußeigenschaft der relevanten Deduktion; wie wir gesehen haben, sind zwar

(B1)	$(p\vee q)\wedge r \vdash p\vee(q\vee r)$	und
(B2)	$p\vee(q\wedge r) \vdash (p\vee q)\wedge(p\vee r)$	beide relevant, aber
(B3)	$(p\vee q)\wedge r \vdash (p\vee q)\wedge(\underline{p}\vee r)$	ist irrelevant

Unter der Voraussetzung, daß (B1) und (B2) relevant herleitbar sind (was ebenfalls am Ende von Kapitel 4.1.4 für einen Sequenzenkalkül gezeigt wird), wären nach obigem Übersetzungsargument auch die entsprechenden mengentheoretischen Formeln (bzw. deren universelle Abschlüsse):

$$(x\cup y)\cap t \subseteq x\cup(y\cap t) \quad \text{und}$$
$$x\cup(y\cap t) \subseteq (x\cup y)\cap(x\cup t)$$

relevant herleitbar; nach dem obigen Übersetzungsargument kann aber

$$(x\cup y)\cap t \subseteq (x\cup y)\cap(x\cup t)$$

nicht relevant herleitbar sein, da man dazu die irrelevante Deduktion (B3) benötigt.

Fassen wir zusammen: unter der Voraussetzung, daß (Ket), (B1) und (B2) relevant herleitbar sind, sind folgende mengentheoretischen Formeln relevant herleitbar (bzw. deren universelle Abschlüsse):

$$x \subseteq y \wedge y \subseteq t \to x \subseteq t$$
$$(x\cup y)\cap t \subseteq x\cup(y\cap t)$$
$$x\cup(y\cap t) \subseteq (x\cup y)\cap(x\cup t)$$

folgende Formel (bzw. ihr universeller Abschluß) jedoch nicht:

$$(x\cup y)\cap t \subseteq (x\cup y)\cap(x\cup t)$$

Setzen wir für x, y und t beliebige feste Mengen a, b und c ein und kürzen wir $(a\cup b)\cap c$ mit α, $a\cup(b\cap c)$ mit β und $(a\cup b)\cap(a\cup c)$ mit γ ab, hätten wir folgende paradoxe Situation:

$$\varnothing \vdash \forall x\forall y\forall t\,(x \subseteq y \wedge y \subseteq t \rightarrow x \subseteq t)$$
$$\varnothing \vdash \alpha \subseteq \beta$$
$$\varnothing \vdash \beta \subseteq \gamma$$

sind relevant herleitbar, hingegen

$$\varnothing \vdash \alpha \subseteq \gamma$$

nicht; (in der Aussagenlogik entspricht dies der Tatsache, daß $\vdash$ nicht abgeschlossen unter Substitution ist; so ist (Ket) zwar relevant, aber nicht jede Substitutionsinstanz); dies führt uns zu der Frage, ob wirklich alle der erwähnten relevanten Deduktionen

$$p\rightarrow q,\ q\rightarrow r \vdash p\rightarrow r$$
$$(p\vee q)\wedge r \vdash p\vee(q\wedge r)$$
$$p\vee(q\wedge r) \vdash (p\vee q)\wedge(p\vee r)$$

relevant herleitbar sind.

Problem 2: *Kann man unter solchen Voraussetzungen ‘vernünftige’ Mengenlehre betreiben?*

3 Vorläufige Zusammenfassung und offene Probleme

Wir beschränken uns auf das Relevanzkriterium von Weingartner[18], Klausel (1) und (2) bzw. von Schurz[19]:
„Assume X ├ A. Then A is a relevant conclusion of X iff no predicate in A is replaceable on some of its occurrences by any other predicate of the same arity, salva validitate of X ├ A. Otherwise, A is an irrelevant conclusion of X.“

Angewendet wird dieses Relevanzkriterium auf Herleitungen in einem Regel-Kalkül (Natürliches Schließen oder Sequenzenkalkül) für ein System der axiomatischen Mengenlehre nach Zermelo-Fraenkel, das in folgendem Detail von Suppes[20] abweicht: aus Gründen der Einfachheit schließen wir Individuen explizit aus und können so mit nur einer Sorte gebundener Variablen arbeiten.
Wir haben durch das Relevanzkriterium den Begriff der relevanten Sequenz (bzw. Deduktion) zur Verfügung, durch einen Regel-Kalkül den Begriff der herleitbaren Sequenz. Gesucht wäre ein Begriff wie der einer relevant herleitbaren Sequenz.

Ein erster Definitionsversuch wäre folgender: Eine Sequenz X ├ A ist *relevant herleitbar* gdw es eine Herleitung von X ├ A gibt, in der keine irrelevanten Sequenzen auftreten, d.h. wenn jede auftretende Sequenz relevant ist.
Dieser Versuch scheitert, da in einer Herleitung von Sequenzen im allgemeinen Sequenzen der Form X ├ ∅ bzw. ∅ ├ A auftreten, d.h. Sequenzen, wo rechts bzw. links vom Sequenzenzeichen keine Formel steht; das Relevanzkriterium jedoch wurde für Anwendungen konzipiert, wo die beiden betrachteten Spezialfälle nicht auftreten. Würde man das Kriterium hier anwenden, wären Sequenzen der Form X ├ ∅ stets relevant (da es kein Vorkommnis einer Aussagenvariablen rechts von ├ gibt), Sequenzen der Form ∅ ├ A stets irrelevant (da die betrachtete Logik abgeschlossen unter Substitution ist). Dies würde bedeuten, daß die Sequenz ∅ ├ $\forall$x (x $\subseteq$ x) nicht relevant herleitbar ist nach obigem Vorschlag .

Als Reaktion darauf modifizieren wir das Relevanzkriterium wie folgt:
X ├ A ist relevant gdw X $\neq$ ∅ ist, A wirklich auftritt und relevant ist nach dem ursprünglichen Relevanzkriterium;
X ├ A ist irrelevant gdw X $\neq$ ∅ ist, A wirklich auftritt und irrelevant ist nach dem ursprünglichen Relevanzkriterium;
sonst ist X ├ A neutral.
Wir definieren: X ├ A ist *relevant herleitbar* gdw es eine Herleitung von X ├ A gibt, in der keine irrelevanten (im Sinn von oben) Sequenzen auftreten.

---

[18] Weingartner, Paul: A logic for QM based on classical logic. In: *L'Art, la science et la metaphysique*. Hrsg. von : Luz Garcia Alonso / Moutsopoulos, E. / Seel, G. (Hg.): Bern 1993: 439-458.
[19] Schurz, Gerhard: Relevant deduction. From solving paradoxes towards a general theory. In: *Erkenntnis* 35(1991): 391-437.
[20] Suppes, Patrick: *Axiomatic set theory*. Princeton 1967.

Dies bedeutet nicht, daß alle auftretenden Sequenzen relevant sind, da sie auch neutral sein können; das obige Beispiel wäre dann relevant herleitbar nach dieser Definition.
Allerdings sehen wir uns dann (vorläufig) mit der Tatsache konfrontiert, daß einfache Theoreme der Booleschen Mengenalgebra nicht relevant herleitbar sind; dies wird für $\varnothing \vdash \forall x\,(x \subseteq x \cup y)$ explizit demonstriert und mit Hilfe eines Übersetzungsarguments auf eine ganze Klasse von mengentheoretischen Theoremen verallgemeinert.

Offenes Problem 2: Kann man unter solchen Voraussetzungen ‘vernünftige’ Mengenlehre betreiben?

Anhand eines dritten Beispiels wird folgende paradoxe Situation aufgezeigt: unter der Voraussetzung, daß bestimmte relevante Deduktionen relevant herleitbar sind, gibt es Mengen α, β und γ, sodaß $\varnothing \vdash \forall x \forall y \forall t\,(x \subseteq y \wedge y \subseteq t \rightarrow x \subseteq t)$, $\varnothing \vdash \alpha \subseteq \beta$ und $\varnothing \vdash \beta \subseteq \gamma$ relevant herleitbar sind, hingegen $\varnothing \vdash \alpha \subseteq \gamma$ nicht.

Offenes Problem 3: Sind alle relevanten Deduktionen relevant herleitbar?

4 Sind alle relevanten Sequenzen relevant herleitbar?

In diesem zweiten, etwas technischeren Teil möchte ich einige Präzisierungen vornehmen und die bisherigen Argumentationen auf eine fundiertere beweistheoretische Basis stellen.
Im Zentrum unserer Untersuchung steht die Frage von Gerhard Schurz, ob jede relevante Sequenz eine relevante Herleitung hat:

„An important question is this: does every relevant deduction have a proof consisting only of relevant steps, or are there some relevant deductions which are only provable with the help of irrelevant steps? The former alternative would be an argument in favour of viewing ├ as a 'deviating' deduction relation, the latter would be a strong argument against it.“[21]

1. Präzisierung
Wir werden uns bei der Beantwortung dieser Frage hauptsächlich auf die Aussagenlogik konzentrieren, und nur einige wenige Anmerkungen zur Prädikatenlogik machen.

2. Präzisierung
Wir werden wie bisher nur 'reine' Regel-Kalküle in Betracht ziehen, d.h. Sequenzenkalküle oder Systeme des Natürlichen Schließens mit p ├ p (bzw. A ├ A) als Axiome und keine gemischten Systeme wie die Systeme für das Natürliche Schließen in Czermak[22] bzw. Schurz[23], wo auch bestimmte nichttriviale Deduktionen als Axiome genommen werden.

3. Präzisierung
Es ist notwendig, zwischen Sequenzenkalkülen und Systemen des Natürlichen Schließens zu unterscheiden, da diese wesentlich in der Formulierung der Regeln voneinander abweichen.
Ein weiterer Unterschied liegt darin, daß im Natürlichen Schließen nur Sequenzen der Form X ├ A vorkommen, in Sequenzenkalkülen jedoch auch Sequenzen der Form X ├ Y, wo Y aus mehreren Formeln bestehen kann. In den bisherigen Beispielen kommen wir auch im Sequenzenkalkül mit Sequenzen der Form X ├ A aus, und alle dort verwendeten Regeln gelten sowohl im Sequenzenkalkül als auch in Systemen des Natürlichen Schließens.

4. Präzisierung
Für Sequenzenkalküle muß daher die Definition der Relevanz modifiziert werden:
Eine gültige Sequenz X ├ Y ist irrelevant (nach Weingartner / Schurz) gdw es ein oder mehrere Vorkommnisse einer Prädikatenvariablen P (einer Aussagenvariablen p) in Y gibt, sodaß P (p) durch eine beliebige andere Prädikatenvariable (Aussagenvariable) an diesen Vorkommnissen ersetzt werden kann und die Sequenz gültig bleibt.

---

[21] Schurz, Gerhard: Relevant deduction. From solving paradoxes towards a general theory. In: *Erkenntnis* 35(1991): 414.
[22] Czermak, Johannes: Logik-Skriptum. Salzburg o. J.
[23] Schurz, Gerhard: Logik-Skriptum. Salzburg o.J.

5. Präzisierung

Gegeben eine Sequenz $X \vdash Y$; wenn in jeder möglichen Herleitung von $X \vdash Y$ in einem Regel-Kalkül eine irrelevante Sequenz $Z \vdash U$ auftritt, wo $Z \neq \emptyset$ und $U \neq \emptyset$ ist, dann ist $X \vdash Y$ nicht relevant herleitbar.

Gesucht ist entweder eine relevante Sequenz $X \vdash Y$, wo $X \neq \emptyset$ und $Y \neq \emptyset$ ist, die nicht relevant herleitbar ist oder ein Beweis, daß es keine derartige Sequenz gibt.

4.1 Sequenzenkalküle

4.1.1 Erste Formulierung eines Sequenzenkalküls und Einführung in das Hauptproblem

6. Präzisierung
Formulierung eines Sequenzenkalküls für die Aussagenlogik in der Mengenversion nach Sundholm[24]:

Sind X und Y (evtl. leere) endliche Formelmengen, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz; wir schreiben A, X für $\{A\} \cup X$ etc.

Axiome sind alle Sequenzen der Form $p \vdash p$;

Schlußregeln:
Logische Regeln:

$$\frac{A, B, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y} \quad (\wedge\ L) \qquad\qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \wedge B} \quad (\wedge\ R)$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, X \vdash Y}{A \vee B, X \vdash Y} \quad (\vee\ L) \qquad\qquad \frac{X \vdash Y, A, B}{X \vdash Y, A \vee B} \quad (\vee\ R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, X \vdash Y}{A \to B, X \vdash Y} \quad (\to L) \qquad\qquad \frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \to B} \quad (\to R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y} \quad (\neg\ L) \qquad\qquad \frac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A} \quad (\neg\ R)$$

Strukturschlußregeln:

$$\frac{X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \quad (AB\ L) \qquad\qquad \frac{X \vdash Y}{X \vdash Y, A} \quad (AB\ R)$$

Bemerkung 8:
Dieser Kalkül weicht in folgendem Detail von Sundholm[25] ab: Sundholm verwendt als Axiome Sequenzen der Form $A, X \vdash Y, A$ und verzichtet auf die Abschwächungsregeln (AB L) bzw. (AB R); beide Systeme sind äquivalent: in unserem System sind alle Sequenzen

[24] Sundholm, Goran: Systems of deduction. In: *Handbook of philosophical logic. Vol. I: Elements of classical logic*. Hrsg. von Gabbay, Dov M.. / Guenthner, F. Dordrecht 1983: 133-188.
[25] Sundholm, Goran: Systems of deduction. In: *Handbook of philosophical logic. Vol. I: Elements of classical logic*. Hrsg. von Gabbay, Dov M.. / Guenthner, F. Dordrecht 1983: 133-188.

der Form A $\vdash$ A herleitbar, wie man durch Induktion nach der Komplexität von A zeigen kann; mit (AB L) und (AB R) sind dann auch alle Sequenzen der Form A, X $\vdash$ Y, A herleitbar; umgekehrt kann man die Abschwächungsregeln bis in die Axiome vorverlegen.

Versuchen wir nun, die relevante Sequenz $p \vee q, \neg q \vdash p$ (Disjunktiver Syllogismus) in unserem Sequenzenkalkül herzuleiten (zu lesen von unten nach oben):

Möglichkeit (i):	$p \vee q \vdash p, q$	
	$p \vdash p, q$	$q \vdash p, q$
	$p \vdash p$	$q \vdash q$
Möglichkeit (ii):	$p, \neg q \vdash p$	$q, \neg q \vdash p$
	$p \vdash p$	$q, \neg q \vdash$
		$q \vdash q$

Wir haben dabei folgende Tatsachen benützt:

(A) Der Sequenzenkalkül für die Aussagenlogik ist vollständig, d.h. jede gültige Sequenz ist herleitbar.

(B) Der Sequenzenkalkül für die Aussagenlogik ist algorithmisch entscheidbar, d.h. es gibt ein effektives Verfahren, um von jeder Sequenz zu entscheiden, ob sie herleitbar ist oder nicht; dieses Verfahren liefert einen Algorithmus, um für jede herleitbare Sequenz eine Herleitung derselben anzugeben.

Für unser Beispiel bedeutet dies:
$p \vee q, \neg q \vdash p$ ist allgemeingültig, also herleitbar; um eine Herleitung zu finden, geht man von der Sequenz aus und wendet die Regeln von unten nach oben an (d.i. der wohlbekannte Tableau-Kalkül); $p \vee q, \neg q \vdash p$ enthält zwei logische Zeichen, also kommen als letzte Regelanwendungen nur ($\vee$ L) oder ($\neg$ L) in Frage (abgesehen von Anwendungen der Abschwächungsregeln, die aber zu ungültigen Sequenzen führen würden); indem man auf diese Weise fortfährt, gelangt man schließlich nach endlich vielen Schritten zu Ausgangssequenzen; im Sequenzenkalkül enthält also jede herleitbare Sequenz die Information über ihre eigene Herleitbarkeit.
Wie wir gesehen haben, treten in beiden möglichen Herleitungen irrelevante Sequenzen der Form Z $\vdash$ U auf, wo $Z \neq \varnothing$ und $U \neq \varnothing$ ist. Sind das aber wirklich alle möglichen Herleitungen?
Betrachten wir die Regeln, stellen wir folgendes fest: alle logischen Regeln sind von der Eigenschaft, daß die Konklusion ein logisches Zeichen mehr enthält als die Prämissen; wenn wir nun die Regeln umdrehen und den umgekehrten Weg gehen, kommen stets nur endlich viele Möglichkeiten in Betracht und das Verfahren bricht wegen dieser Eigenschaft nach endlich vielen Schritten ab.

Nun enthält ein Sequenzenkalkül üblicherweise auch folgende sog. Schnitt-Regel (CUT):

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad A, X \vdash Y}{X \vdash Y} \qquad \text{(CUT)}$$

Dies ist die einzige Regel, die Information verschluckt; wenn man jetzt Herleitungen zurückverfolgt, hat man unendlich viele Möglichkeiten, da die Schnittformel A beliebig sein kann.
Nimmt man diese Regel zum ursprünglichen Kalkül hinzu, sind trotzdem nicht mehr Sequenzen herleitbar, denn für die Aussagenlogik gilt der sog. Hauptsatz von Gentzen oder Schnitteliminationssatz:

(C) Jede Sequenz, die im Kalkül mit der Schnittregel herleitbar ist, ist auch im Kalkül ohne Schnittregel herleitbar.

Daraus folgt
(D) der Satz über die Teilformeleigenschaft: Ist H eine schnittfreie Herleitung der Sequenz $X \vdash Y$, so sind alle in H vorkommenden Formeln Teilformeln von Formeln in X, Y.

Wie aber sieht es mit der relevanten Herleitbarkeit aus? Als **erstes Zwischenergebnis** können wir ja nur festhalten:

Für die erste Formulierung des Sequenzenkalküls gibt es eine relevante Sequenz $X \vdash Y$ mit $X \neq \varnothing$ und $Y \neq \varnothing$, nämlich $p \vee q, \neg q \vdash p$, sodaß in jeder *schnittfreien* Herleitung von $X \vdash Y$ irrelevante Sequenzen $Z \vdash U$ mit $Z \neq \varnothing$ und $U \neq \varnothing$ auftreten.

Das **Hauptproblem** ist es, dies für jede mögliche Herleitung zu zeigen; dies wäre gezeigt, wenn sich folgender Schnitteliminationssatz für relevante Herleitungen beweisen ließe:

Hat eine Sequenz eine relevante Herleitung, dann hat sie eine relevante Herleitung ohne Anwendung der Schnittregel.

Oder präziser: Wenn $X \vdash Y$ eine Herleitung hat, in der keine irrelevanten Sequenzen der Form $Z \vdash U$ mit $Z \neq \varnothing$ und $U \neq \varnothing$ auftreten, dann hat $X \vdash Y$ eine Herleitung ohne Anwendung der Schnittregel mit derselben Eigenschaft.

Für die obige Formulierung der Schnittregel läßt sich dies in der Tat sehr leicht zeigen, denn angenommen, in einer Herleitung von $X \vdash Y$ wird einmal die Schnittregel in folgender Form angewendet:

$$\frac{X' \vdash Y', A \qquad A, X' \vdash Y'}{X' \vdash Y'}$$

1.Fall: $X' \neq \emptyset$ und $Y' \neq \emptyset$: da $X' \vdash Y'$ herleitbar ist, ist mit (AB R) auch $X' \vdash Y', sA$ herleitbar für jede Substitution s; dann ist aber $X' \vdash Y', A$ irrelevant;

2. Fall: $X' \neq \emptyset$ und $Y' = \emptyset$: da $X' \vdash$ herleitbar ist, ist mit (AB R) auch $X' \vdash sA$ herleitbar für jede Substitution s; dann ist aber $X' \vdash A$ irrelevant;

3. Fall: $X' = \emptyset$ und $Y' \neq \emptyset$: da $\vdash Y'$ herleitbar ist, ist auch $\vdash sY'$ herleitbar für jede Substitution s und mit (AB L) auch $A \vdash sY'$; dann ist aber $A \vdash Y'$ irrelevant.

Dabei ist eine Substitution s eine Funktion von der Menge WFF der wohlgeformten Formeln nach WFF mit folgenden Eigenschaften: $s\neg A = \neg sA$, $s(A*B) = sA*sB$ für jeden zweistelligen Junktor $*$; s ist festgelegt durch die Werte sp für alle $p \in AV$.

Als **zweites Zwischenergebnis** können wir nun festhalten:

Für die erste Formulierung des Sequenzenkalküls gibt es eine relevante Sequenz $X \vdash Y$ mit $X \neq \emptyset$ und $Y \neq \emptyset$, nämlich $p \vee q, \neg q \vdash p$, sodaß in *jeder* möglichen Herleitung von $X \vdash Y$ irrelevante Sequenzen $Z \vdash U$ mit $Z \neq \emptyset$ und $U \neq \emptyset$ auftreten.

Denn gäbe es eine Herleitung von $p \vee q, \neg q \vdash p$, in der keine irrelevanten Sequenzen der Form $Z \vdash U$ mit $Z \neq \emptyset$ und $U \neq \emptyset$ auftreten, wäre diese schnittfrei; aber wir haben alle schnittfreien Herleitungen schon überprüft.

Allerdings muß ich gleich folgende Einschränkung machen:
Die Tatsache, daß wir so leicht ein solches Beispiel gefunden haben, und daß wir die Schnittelimination für relevante Herleitungen so leicht zeigen konnten, liegt wesentlich an der Formulierung der Regeln, wie wir nun sehen werden.

4.1.2 Zweite Formulierung eines Sequenzenkalküls

6. Präzisierung, Variante 2
Formulierung eines Sequenzenkalküls für die Aussagenlogik in der Folgenversion nach Heindorf[26]:

Sind X und Y (evtl. leere) endliche Formelfolgen, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz;

Axiome sind alle Sequenzen der Form $p \vdash p$;

Schlußregeln:
Logische Regeln:

$$\frac{A, X \vdash Y}{A \land B, X \vdash Y} \quad (\land\, L1) \qquad\qquad \frac{X \vdash Y, A \qquad Z \vdash U, B}{X, Z \vdash Y, U, A \land B} \quad (\land\, R)$$

$$\frac{B, X \vdash Y}{A \land B, X \vdash Y} \quad (\land\, L2)$$

$$\frac{A, X \vdash Y \qquad B, Z \vdash U}{A \lor B, X, Z \vdash Y, U} \quad (\lor\, L) \qquad\qquad \frac{X \vdash Y, A}{X \vdash Y, A \lor B} \quad (\lor\, R1)$$

$$\frac{X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \lor B} \quad (\lor\, R2)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad B, Z \vdash U}{A \rightarrow B, X, Z \vdash Y, U} \quad (\rightarrow L) \qquad\qquad \frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \rightarrow B} \quad (\rightarrow R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y} \quad (\neg\, L) \qquad\qquad \frac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A} \quad (\neg\, R)$$

Strukturschlußregeln:

$$\frac{X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \quad (AB\ L) \qquad\qquad \frac{X \vdash Y}{X \vdash Y, A} \quad (AB\ R)$$

$$\frac{A, A, X \vdash Y}{A, X \vdash Y} \quad (KÜ\ L) \qquad\qquad \frac{X \vdash Y, A, A}{X \vdash Y, A} \quad (KÜ\ R)$$

$$\frac{X, A, B, X' \vdash Y}{X, B, A, X' \vdash Y} \quad (VE\ L) \qquad\qquad \frac{X \vdash Y, A, B, Y'}{X \vdash Y, B, A, Y'} \quad (VE\ R)$$

[26] Heindorf, Lutz: *Elementare Beweistheorie*. Mannheim 1994.

Bemerkung 9:
Heindorf [27] verwendet als Axiome Sequenzen der Gestalt $A \vdash A$; analog zu Bemerkung 8 sind beide Kalküle äquivalent.

Die zwei wesentlichen Unterschiede zum ersten besprochenen Kalkül sind (a) die Formulierung gewisser Regeln und (b) das Vorhandensein zusätzlicher Strukturschlußregeln.

(a) Betrachten wir als Beispiel die Regel für die Einführung der Disjunktion rechts: die ursprüngliche Regel ($\vee$ R) wird nun ersetzt durch zwei Regeln ($\vee$ R1) und ($\vee$ R2); um jetzt eine Sequenz herzuleiten, wo $\vee$ rechts vorkommt, geht man beispielsweise folgendermaßen vor:

1. $p \vee q \vdash p, q$	relevante Deduktion
2. $p \vee q \vdash p, p \vee q$	($\vee$ R2) aus 1.
3. $p \vee q \vdash p \vee q, p$	(VE R) aus 2.
4. $p \vee q \vdash p \vee q, p \vee q$	($\vee$ R1) aus 3.
5. $p \vee q \vdash p \vee q$	(KÜ R) aus 4.

Jede Anwendung von ($\vee$ R1) oder ($\vee$ R2) bedeutet aber das Vorhandensein einer irrelevanten Sequenz; da aber diese Regeln die einzige Möglichkeit sind, $\vee$ rechts einzuführen, ist diese Formulierung für unsere Zwecke ungeeignet. Dasselbe Argument gilt auch für Sequenzen, die nicht von der Form $A \vdash A$ sind und die rechts das Zeichen $\vee$ enthalten; überdies benötigt man dann wie oben die Kürzungsregel rechts (KÜ R).

(b) Schon bedingt durch die Formulierung der Sequenzen als (Paare von) Formelfolgen benötigen wir die Kürzungsregeln (KÜ L) und (KÜ R); jede Anwendung von (KÜ R) bedeutet aber, daß als Prämisse eine irrelevante Sequenz auftritt; nun gibt es aber Sequenzen, zu deren schnittfreier Herleitung man (KÜ R) unbedingt braucht, so z.B. zur Herleitung der relevanten Sequenz $p \vee q, q \to p \vdash p$ (die Herleitungen sind wiederum von unten nach oben zu lesen):

Möglichkeit (i):

$$\begin{array}{ccc} & p \vee q, q \to p \vdash p, p & \\ p \vdash p & & q, q \to p \vdash p \\ & q \vdash q & \qquad p \vdash p \end{array}$$

Möglichkeit (ii):

$$\begin{array}{ccc} & p \vee q, q \to p \vdash p, p & \\ p \mathrm{\ v\ } p & & p \vee q \vdash p, q \\ & p \vdash p & \qquad q \vdash q \end{array}$$

aber $p \vee q, q \to p \vdash p, p$ ist irrelevant.

[27] Heindorf, Lutz: *Elementare Beweistheorie*. Mannheim 1994.

Als **drittes Zwischenergebnis** können wir festhalten:

Für die zweite Formulierung des Sequenzenkalküls gibt es eine relevante Sequenz $X \vdash Y$ mit $X \neq \emptyset$ und $Y \neq \emptyset$, nämlich $p \vee q, q \rightarrow p \vdash p$, sodaß in jeder *schnittfreien* Herleitung von $X \vdash Y$ irrelevante Sequenzen $Z \vdash U$ mit $Z \neq \emptyset$ und $U \neq \emptyset$ auftreten (und zwar nur aufgrund der Folgen-Formulierung)

Ein entscheidender Vorteil der obigen Formulierung der Regeln (wenn man möglichst viele relevante Deduktionen relevant herleiten möchte) ist allerdings, daß beim Zurückverfolgen von Beweisen bei Regeln mit zwei Prämissen nicht sämtliche Antezedensformeln der Konklusion in beide Prämissen mitgenommen werden müssen.

So hat z.B. unser erstes Gegenbeispiel $p \vee q, \neg q \vdash p$ folgende einfache relevante Herleitung:

1.	$p \vdash p$	Axiom
2.	$q \vdash q$	Axiom
3.	$p \vee q \vdash p, q$	($\vee$ L) aus 1. und 2.
4.	$p \vee q, \neg q \vdash p$	($\neg$ L) aus 3.

Allerdings muß man dann auch die Schnittregel folgendermaßen formulieren:

$$\frac{X \vdash Y, A \qquad A, Z \vdash U}{X, Z \vdash Y, U} \quad \text{(CUT)}$$

Jetzt funktioniert der Beweis, daß jede relevante Herleitung eine schnittfreie relevante Herleitung besitzt, nicht mehr so einfach wie vorher.

Kombination der beiden Systeme führt zur folgenden dritten Version des Sequenzenkalküls.

4.1.3 Dritte Formulierung eines Sequenzenkalküls

6. Präzisierung, Variante 3
Formulierung eines Sequenzenkalküls für die Aussagenlogik in der Mengenversion:

Sind X und Y (evtl. leere) endliche Formelmengen, so ist $X \vdash Y$ eine Sequenz;

Axiome sind alle Sequenzen der Form $p \vdash p$;

Schlußregeln:
Logische Regeln:

$$\frac{A, B, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y}\ (\wedge L) \qquad \frac{X \vdash Y, A \quad Z \vdash U, B}{X, Z \vdash Y, U, A \wedge B}\ (\wedge R)$$

$$\frac{A, X \vdash Y \quad B, Z \vdash U}{A \vee B, X, Z \vdash Y, U}\ (\vee L) \qquad \frac{X \vdash Y, A, B}{X \vdash Y, A \vee B}\ (\vee R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \quad B, Z \vdash U}{A \rightarrow B, X, Z \vdash Y, U}\ (\rightarrow L) \qquad \frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \rightarrow B}\ (\rightarrow R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y}\ (\neg L) \qquad \frac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A}\ (\neg R)$$

Strukturschlußregeln:

$$\frac{X \vdash Y}{A, X \vdash Y}\ (AB\ L) \qquad \frac{X \vdash Y}{X \vdash Y, A}\ (AB\ R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \quad A, Z \vdash U}{X, Z \vdash Y, U}\ (CUT)$$

Aber auch hier läßt sich eine relevante Sequenz finden, die keine schnittfreie relevante Herleitung besitzt, nämlich $p, p \vee q \rightarrow r \vdash r$; die einzige schnittfreie Herleitung sieht folgendermaßen aus:

1.	$p \vdash p$	Axiom
2.	$p \vdash p, q$	(AB R) aus 1.
3.	$p \vdash p \vee q$	($\vee$ R) aus 2.
4.	$r \vdash r$	Axiom
5.	$p, p \vee q \rightarrow r \vdash r$	($\rightarrow$ L) aus 3. und 4.

Als **viertes Zwischenergebnis** halten wir fest:

Für die dritte Formulierung des Sequenzenkalküls gibt es eine relevante Sequenz $X \vdash Y$ mit $X \neq \emptyset$ und $Y \neq \emptyset$, nämlich $p,\ p \vee q \rightarrow r \vdash r$, sodaß in jeder *schnittfreien* Herleitung von $X \vdash Y$ irrelevante Sequenzen $Z \vdash U$ mit $Z \neq \emptyset$ und $U \neq \emptyset$ auftreten.

Dieses Beispiel wurde schon von Schurz[28] gefunden; Gerhard Schurz argumentiert, daß die Sequenz $p,\ p \vee q \rightarrow r \vdash r$ folgende relevante Herleitung habe:

1.	$p,\ p \rightarrow r \vdash r$	relevante Deduktion, relevant herleitbar
2.	$p \vee q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$	relevante Deduktion
3.	$p,\ p \vee q \rightarrow r \vdash r$	aus 1. und 2.

Allerdings verwendet er hier die Schnittregel (CUT) und verschiebt somit das Problem auf die Frage nach einer relevanten Herleitbarkeit von $p \vee q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$, einer Sequenz mit größerer logischer Komplexität als $p,\ p \vee q \rightarrow r \vdash r$ (in der Tat erhält man $p \vee q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$ aus $p,\ p \vee q \rightarrow r \vdash r$ durch Anwendung von $(\rightarrow R)$).

Das Hauptproblem ist nach wie vor:
Problem 4: Zeige für die dritte Formulierung des Sequenzenkalküls für die Aussagenlogik: Wenn
$X \vdash Y$ eine Herleitung hat, in der keine irrelevanten Sequenzen der Form $Z \vdash U$ mit $Z \neq \emptyset$ und $U \neq \emptyset$ auftreten, dann hat $X \vdash Y$ eine Herleitung ohne Anwendung der Schnittregel mit derselben Eigenschaft.

Oder finde eine Sequenz $X \vdash Y$, die keine schnittfreie relevante Herleitung hat, aber eine relevante Herleitung mit Schnitt.

[28] Schurz, Gerhard: Relevant deduction. From solving paradoxes towards a general theory. In: *Erkenntnis* 35(1991): 414.

4.1.4 Bemerkungen zur Prädikatenlogik

Zur dritten Version des Sequenzenkalküls für die Aussagenlogik kommen die folgenden prädikatenlogischen Regeln hinzu:

$$\frac{A(t), X \vdash Y}{\forall x A(x), X \vdash Y} \ (\forall\ L) \qquad \frac{X \vdash Y, A(a)}{X \vdash Y, \forall x A(x)} \ (\forall\ R) \text{ mit (VB)}$$

$$\frac{A(a), X \vdash Y}{\exists x A(x), X \vdash Y} \ (\exists\ L) \text{ mit (VB)} \qquad \frac{X \vdash Y, A(t)}{X \vdash Y, \exists x A(x)} \ (\exists\ R)$$

Dabei ist t ein beliebiger Term und die Variablenbedingung (VB) lautet: die freie Variable a kommt unter dem Strich nicht mehr vor.

Für diesen erweiterten Sequenzenkalkül gilt:

(A) Der Sequenzenkalkül für die Prädikatenlogik ist vollständig, d.h. jede gültige Sequenz ist herleitbar

(B) Der Sequenzenkalkül für die Prädikatenlogik ist algorithmisch unentscheidbar, d.h. es gibt kein effektives Verfahren, um von jeder Sequenz zu entscheiden, ob sie herleitbar ist oder nicht; allerdings gibt es einen Algorithmus, um für jede herleitbare Sequenz eine Herleitung derselben anzugeben.

(C) Jede Sequenz, die in diesem Kalkül mit der Schnittregel herleitbar ist, ist auch ohne Schnittregel herleitbar.

(D) Satz über die Teilformeleigenschaft: Ist H eine schnittfreie Herleitung der Sequenz $X \vdash Y$, so sind alle in H vorkommenden Formeln Teilformeln von Formeln in X, Y.

(E) Satz über die Mittelsequenz: Wenn $X \vdash Y$ eine herleitbare Sequenz ist, die nur aus Formeln in pränexer Form besteht, dann gibt es eine schnittfreie Herleitung H von $X \vdash Y$ mit folgender Eigenschaft: es gibt in H eine Sequenz, die sog. Mittelsequenz, die nur aus quantorenfreien Formeln besteht; unterhalb dieser Sequenz werden nur Quantorenregeln angewendet (oberhalb der Mittelsequenz werden nach der Teilformeleigenschaft keine Quantorenregeln angewendet; dieser Teil ist also rein aussagenlogisch).

Betrachten wir nochmals das Beispiel 2 aus Kapitel 2; gesucht war eine Herleitung der Sequenz $\vdash \forall x \forall y\, (x \subseteq x \cup y)$ bzw. der Sequenz $\vdash \forall x \forall y \forall z\, (z \in x \rightarrow z \in x \vee z \in y)$.

Der aussagenlogische Teil der von mir dort angegebenen Herleitung sieht jetzt folgendermaßen aus:

1. $w \in a \vdash w \in a$ Axiom
2. $w \in a \vdash w \in a, w \in b$ (AB R) aus 1.
3. $w \in a \vdash w \in a \vee w \in b$ ($\vee$ R) aus 2.

Bemerkung 10: Die Addition (ADD) aus Teil 1 wird jetzt ersetzt durch eine Abschwächung rechts und eine Anwendung der $\vee$-Regel rechts.

Man fährt auf die gleiche Weise fort wie im ersten Teil.

Das Ergebnis bleibt das gleiche: es tritt eine irrelevante Sequenz auf, nämlich $w \in a \vdash w \in a, w \in b$, die von der Form $p \vdash p, q$ ist.

Aber woher wissen wir, daß in jeder möglichen Herleitung von $\vdash \forall x \forall y \forall z\ (z \in x \rightarrow z \in x \vee z \in y)$ eine irrelevante Sequenz auftritt?

Nach den beweistheoretischen Überlegungen können wir als **fünftes Zwischenergebnis** nur festhalten:
In jeder *schnittfreien* Herleitung von $\vdash \forall x \forall y \forall z\ (z \in x \rightarrow z \in x \vee z \in y)$ treten irrelevante Sequenzen der Form $Z \vdash U$ mit $Z \neq \emptyset$ und $U \neq \emptyset$ auf.

Begründung: Die letzten Regeln können nur ($\forall$ R) (dreimal) und ($\rightarrow$ R) gewesen sein.

Es bleibt jedoch auch hier zu zeigen, daß irrelevante Sequenzen in jeder möglichen Herleitung verwendet werden müssen:

Problem 5: Zeige für den Sequenzenkalkül für die Prädikatenlogik: Wenn $X \vdash Y$ eine Herleitung hat, in der keine irrelevanten Sequenzen der Form $Z \vdash U$ mit $Z \neq \emptyset$ und $U \neq \emptyset$ auftreten, dann hat $X \vdash Y$ eine Herleitung ohne Anwendung der Schnittregel mit derselben Eigenschaft.

Zum Abschluß noch relevante Herleitungen von (Ket), (B1) und (B2) aus Kapitel 3 im Anschluß an Beispiel 3:

(Ket) $p \to q, q \to r \vdash p \to r$:

1. $p \vdash p$	Axiom
2. $q \vdash q$	Axiom
3. $r \vdash r$	Axiom
4. $q, q \to r \vdash r$	($\to$ L) aus 2. und 3.
5. $p, p \to q, q \to r \vdash r$	($\to$ L) aus 1. und 4.
6. $p \to q, q \to r \vdash p \to r$	($\to$ R) aus 5.

(B1) $(p \lor q) \land r \vdash p \lor (q \land r)$:

1. $p \vdash p$	Axiom
2. $q \vdash q$	Axiom
3. $r \vdash r$	Axiom
4. $q, r \vdash q \land r$	($\land$ R) aus 2. und 3.
5. $p \lor q, r \vdash p, q \land r$	($\lor$ L) aus 1. und 4.
6. $p \lor q, r \vdash p \lor (q \land r)$	($\lor$ R) 5.
7. $(p \lor q) \land r \vdash p \lor (q \land r)$	($\land$ L) 6.

(B3) $p \lor (q \land r) \vdash (p \lor q) \land (p \lor r)$:

1. $p \vdash p$	Axiom
2. $q \vdash q$	Axiom
3. $r \vdash r$	Axiom
4. $q, r \vdash r$	(AB L) aus 3.
5. $q \land r \vdash r$	($\land$ L) aus 4.
6. $p \lor (q \land r) \vdash p, r$	($\lor$ L) aus 1. und 5.
7. $p \lor (q \land r) \vdash p \lor r$	($\lor$ R) aus 6.
8. $q, r \vdash q$	(AB L) aus 2.
9. $q \land r \vdash q$	($\land$ L) aus 8.
10. $p \lor (q \land r) \vdash p, q$	($\lor$ L) aus 1. und 9.
11. $p \lor (q \land r) \vdash p \lor q$	($\lor$ R) aus 10.
12. $p \lor (q \land r) \vdash (p \lor q) \land (p \lor r)$	($\land$ R) aus 7. und 11.

4.2 Systeme des Natürlichen Schließens

Systeme des Natürlichen Schließens sind noch weniger geeignet, relevante Herleitungen für relevante Sequenzen zu liefern. Dies scheint daran zu liegen, daß man nur Sequenzen der Form $X \vdash A$ herleitet, wo rechts vom Sequenzenzeichen genau eine Formel steht, und man daher weniger Spielraum zur Formulierung gewisser Regeln hat.

Betrachten wir die Systeme von Sundholm[29] (Mengenversion), Rautenberg[30] (Mengenversion) und Heindorf [31] (Folgenversion) im Vergleich:

Alle Systeme haben als $\vee$-Einführungsregeln die folgenden:

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash A \vee B} \qquad (\vee\ E1)$$

$$\frac{X \vdash B}{X \vdash A \vee B} \qquad (\vee\ E2)$$

und unterscheiden sich nur in der Formulierung der $\vee$-Beseitigungsregel ($\vee$ B):

$$\frac{X \vdash A \vee B \qquad A, X \vdash C \qquad B, X \vdash C}{X \vdash C} \qquad \text{Sundholm}$$

$$\frac{A, X \vdash C \qquad B, X \vdash C}{A \vee B, X \vdash C} \qquad \text{Rautenberg}$$

$$\frac{X \vdash A \vee B \qquad A, Y \vdash C \qquad B, Z \vdash C}{X, Y, Z \vdash C} \qquad \text{Heindorf}$$

Dies bedeutet aber, daß man die $\vee$-Einführungsregeln verwenden *muß*, um relevante Sequenzen der Form $X \vdash A \vee B$ herzuleiten, und dann gilt das unter 4.1.2 Gesagte für sämtliche hier betrachteten Systeme des Natürlichen Schließens; so benötigt man z.B., um $(p\vee q)\wedge r \vdash p\vee(q\wedge r)$ herzuleiten, die Schritte $p \vdash p\vee(q\wedge r)$ und $q\wedge r \vdash p\vee(q\wedge r)$.

Zum Abschluß noch ein Beispiel: man kann sich überlegen, daß man, um $p\vee q, \neg q \vdash p$ herzuleiten, den Schritt $q, \neg q \vdash p$ und benötigt.

[29] Sundholm, Goran: Systems of deduction. In: *Handbook of philosophical logic. Vol. I: Elements of classical logic*. Hrsg. von Gabbay, Dov M.. / Guenthner, F. Dordrecht 1983: 133-188.
[30] Rautenberg, W.: *Klassische und nichtklassische Aussagenlogik*. Braunschweig 1979.
[31] Heindorf, Lutz: *Elementare Beweistheorie*. Mannheim 1994.

5 Zusammenfassung und offene Probleme

Hauptproblem war die Frage, ob jede relevante Sequenz eine relevante Herleitung besitzt; präzise formuliert: gegeben sei ein Regel-Kalkül (Natürliches Schließen oder Sequenzenkalkül) für die Aussagenlogik; gesucht ist eine relevante Sequenz $X \vdash Y$, wo $X \neq \emptyset$ und $Y \neq \emptyset$ ist, und wo in jeder möglichen Herleitung von $X \vdash Y$ eine irrelevante Sequenz $Z \vdash U$ auftritt, wo $Z \neq \emptyset$ und $U \neq \emptyset$ ist, oder ein Beweis dafür, daß es keine derartige Sequenz gibt.

Es stellt sich erstens heraus, daß es von der Art des Kalküls abhängt, welche Sequenzen relevante Herleitungen haben und welche nicht; für Systeme des Natürlichen Schließens findet man sehr leicht relevante Sequenzen, die keine relevanten Herleitungen haben können; daher konzentriert sich unser Hauptinteresse auf den Sequenzenkalkül.
Es stellt sich zweitens heraus, daß es auch von der Formulierung des Sequenzenkalküls abhängt, welche Sequenzen eine relevante Herleitung haben und welche nicht.

Für sämtliche betrachtete Versionen des Sequenzenkalküls findet man sehr leicht relevante Sequenzen, die keine *schnittfreien* relevanten Herleitungen haben können. Das Hauptproblem ist es, zu zeigen, daß diese Sequenzen überhaupt keine relevanten Herleitungen besitzen.

Ist man daran interessiert, möglichst viele relevanten Sequenzen relevant herzuleiten, ist die dritte von uns angegebene Formulierung des Sequenzenkalküls am geeignetsten.
Diese Formulierung faßt Sequenzen als Paare von Formelmengen auf; würde man Sequenzen als Paare von Formelfolgen auffassen, wären Sequenzen nicht relevant herleitbar, zu deren Herleitung man die rechte Kürzungsregel benötigt. Ferner muß man auf die Formulierung der rechten $\vee$-Einführungsregel achten und darauf, daß man beim Zurückverfolgen der Regeln von unten nach oben nicht sämtliche Antezedensformeln der Konklusion in beide Prämissen mitnimmt.

Für diese Version des Sequenzenkalküls stellt sich folgendes
Offenes Problem 4: Hat jede Sequenz, die eine relevante Herleitung hat, auch eine relevante Herleitung ohne Anwendung der Schnittregel; oder präziser, gilt folgender Satz: wenn $X \vdash Y$ eine Herleitung hat, in der keine irrelevanten Sequenzen der Form $Z \vdash U$ mit $Z \neq \emptyset$ und $U \neq \emptyset$ auftreten, dann hat $X \vdash Y$ eine Herleitung ohne Anwendung der Schnittregel mit derselben Eigenschaft.

Würde dieser Satz gelten, dann hätten die oben erwähnten relevanten Sequenzen überhaupt keine relevanten Herleitungen, da sie keine schnittfreien relevanten Herleitungen besitzen.

Es ist klar, daß die Beantwortung dieser Frage auch zentral ist für unser ursprüngliches Problem, welche Prinzipien man zum Beweisen von mengentheoretischen Theoremen braucht.

Für Beispiel 2 aus Teil 1 war ja eine Herleitung von $\vdash \forall x \forall y \forall z\ (z \in x \to z \in x \vee z \in y)$ gesucht; sämtliche schnittfreien Herleitungen kann man leicht überblicken, und in jeder solchen Herleitung braucht man das irrelevante Prinzip $p \vdash p \vee q$. Ob dies auch für alle möglichen *prädikatenlogischen* Herleitungen gilt, ist indes noch eine offene Frage.

Literatur

Anderson, Alan Ross / Belnap, Nuel D.: *Entailment: The logic of relevance and necessity*. Vol. I. Princeton 1975.
Czermak, Johannes: Logik-Skriptum. Salzburg o. J.
Ebbinghaus, Heinz-Dieter: *Einführung in die Mengenlehre*. 3. Aufl. Mannheim 1994
Heindorf, Lutz: *Elementare Beweistheorie*. Mannheim 1994.
Schröder, J.: Körner's criterion of relevance and analytic tableau. In: *Journal of Philosophical Logic* 21(1992): 183-192.
Rautenberg, W.: *Klassische und nichtklassische Aussagenlogik*. Braunschweig 1979.
Schurz, Gerhard: Logik-Skriptum. Salzburg o.J.
Schurz, Gerhard: Relevant deduction. From solving paradoxes towards a general theory. In: *Erkenntnis* 35(1991): 391-437.
Schurz, Gerhard: Relevant deductive inference: criteria and logics. In: *Advances in scientific philosophy. Essays in honour of Paul Weingartner on the occasion of the 60th anniversary of his birthday*. Hrsg. von Schurz, Gerhard / Dorn, Georg. Amsterdam 1991: 57-84.
Schurz, Gerhard / Weingartner, Paul: Verisimilitude defined by relevant consequence-elements. A new reconstruction of Popper's original idea. In: *What is closer-to-the-truth*. Hrsg. von Kuipers, Th.: Amsterdam (1987): 47-77.
Sundholm, Goran: Systems of deduction. In: *Handbook of philosophical logic. Vol. I: Elements of classical logic*. Hrsg. von Gabbay, Dov M.. / Guenthner, F. Dordrecht 1983: 133-188.
Suppes, Patrick: *Axiomatic set theory*. Princeton 1967.
Suppes, Patrick: Comments by Patrick Suppes. In: *Patrick Suppes: Scientific philosopher*. Vol. 3. Hrsg. von Humphreys, P. Dordrecht 1994: 121-124.
Weingartner, Paul: Remarks on the consequence-class of theories. In: *The role of experience in science. Proceedings of the 1986 conference of the Académie Internationale de Philosophie des Sciences (Bruxelles). Held at the University of Heidelberg*. Hrsg. von Scheibe, E. Berlin 1988: 161-180.
Weingartner, Paul: A logic for QM based on classical logic. In: *L'Art, la science et la metaphysique*. Hrsg. von : Luz Garcia Alonso / Moutsopoulos, E. / Seel, G. (Hg.): Bern 1993: 439-458.
Weingartner, Paul: Can there be reasons for putting limitations on classical logic? In: *Patrick Suppes: Scientific philosopher*. Vol. 3. Hrsg. von Humphreys, P. Dordrecht 1994: 89-121.
Weingartner, Paul / Schurz, Gerhard: Paradoxes solved by simple relevance criteria. In: *Logique et Analyse* 133 (1986): 3-40.